ISSN 0130-2221
МАЙ/ИЮНЬ
1997 · №3

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАЙ/ИЮНЬ · 1997 · №3

Бюро Квантум

В номере:

Свист в космосе

П. БЛИОХ

Космическое пространство вокруг Земли не такое уж «пустое», как иногда думают. Здесь находятся нейтральные частицы — атомы и молекулы атмосферных газов и свободные заряды — электроны и ионы, входящие в состав космической плазмы. Для нас, живущих на дне воздушного океана, очень важно знать, что происходит во всей толще, так как существует тесная связь между процессами в космосе и условиями жизни на Земле.

Измерения концентрации космических частиц, электрических и магнитных полей на больших высотах производятся с помощью приборов, устанавливаемых на спутниках и ракетах. Но существуют и другие методы. Оказывается, многие сведения об атмосфере на расстояниях в сотни и тысячи километров от Земли можно получить, не выходя из лаборатории. Примечательно, что «наземно-космические» исследования могут быть выполнены очень простыми способами. Цена необходимого оборудования примерно соответствует стоимости радиоприемника или телевизора. Для реализации этих заманчивых возможностей надо только научиться слышать «свист», идущий из космоса, о чем мы и расскажем в этой статье.

Радиоволны в нейтральном газе

Радиоволны распространяются в вакууме со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Они представляют собой электромагнитные колебания с частотами f от единиц герц (Гц) до тысяч гигагерц (1 ГГц = 10^9 Гц). Если же иметь в виду бытовую радиоаппаратуру, то здесь используются частоты от нескольких сот килогерц (кГц) до сотен мегагерц (МГц). Нас же будут интересовать в дальнейшем частоты килогерцевого диапазона ($f = 10^3 - 10^4$ Гц).

Распространение радиоволн в среде отличается от того, что происходит в вакууме. В среде всегда присутствуют электрически заряженные частицы. Они могут быть в «связанном» состоянии (электроны в нейтральных атомах) либо в «свободном» (электроны в плазме). Кроме электронов, которые являются носителями отрицательного заряда, в среде имеются и положительно заряженные частицы — ионы. В интересующем нас диапазоне частот роль ионов невелика, так как, обладая очень большой (по сравнению с электронами) массой, они колеблются с очень малой амплитудой. Электроны же, осциллируя в электрическом поле радиоволны, сами становятся источниками электромагнитных волн той же частоты.

Таким образом в среде возникает результирующая волна, которая распространяется с иной скоростью. Изменение скорости распространения волны учитывают с помощью коэффициента преломления n, который показывает, во сколько раз скорость волны в среде $v_ф$ (о смысле индекса «ф» будет сказано ниже) отличается от скорости света:

$$v_ф = \frac{c}{n(\omega)}. \qquad (1)$$

Записав $n(\omega)$ как функцию частоты волны $\omega = 2\pi f$, мы подчеркиваем тот факт, что коэффициент преломления данной среды имеет, вообще говоря, разные значения на разных частотах. Зависимость n от ω называется *дисперсией*, и она становится особенно заметной при резонансе, когда частота радиоволны ω близка к собственной частоте ω_0 колебаний электронов. Если разность частот достаточно велика, например $\omega \ll \omega_0$, дисперсия оказывается очень слабой. Вопрос о зависимости $n(\omega)$ будет играть для нас решающее значение. Поэтому нам необходимо прежде всего оценить собственные частоты колебаний электронов в нейтральном газе и в плазме.

Начнем с нейтрального газа, где электроны присутствуют только в составе атомов и молекул. Точные расчеты собственных частот проводятся методами квантовой механики, но приблизительные оценки (они нас вполне устраивают) можно получить по аналогии с самой простой колебательной системой — маятником. Напомним хорошо известную формулу для частоты колебаний маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (2)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, а l — длина маятника. Умножив числитель и знаменатель подкоренного выражения на массу маятника m, перепишем (2) следующим образом:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F_g}{ml}}. \qquad (3)$$

Вместо ускорения g мы ввели силу тяжести $F_g = mg$. Теперь можно применить полученную формулу к колебаниям электронов. Для этого надо заменить гравитационную силу F_g на электростатическую силу F_E, которая удерживает электрон в атоме. Согласно закону Кулона, она равна $F_E = ke^2/a^2$, где $k = 9 \cdot 10^9$ $ф^{-1} \cdot м$ — коэффициент в законе Кулона, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, a 10^{-10} м — размер атома, который в данном случае играет роль длины маятника. Подставив в формулу (3) $l = a$, получим

$$\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{ke^2}{ma^3}}. \qquad (4)$$

Далее, учитывая, что масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, находим $\omega_0 \sim 10^{16}$ $с^{-1}$, что примерно соответствует диапазону видимого света и намного превышает частоту интересующих нас радиоволн. Следовательно, с большим запасом выполняется неравенство $\omega \ll \omega_0$, и нейтральный газ почти не влияет на распространение радиоволн. Даже в нижних, самых плотных слоях атмосферы коэффициент преломления n отличается от единицы лишь в четвертом знаке, в космосе же влияние нейтрального газа еще намного слабее. Оно проявляется только косвенным образом через столкновения «свободных» (плазменных) электронов с нейтралами. Столкновения приводят к затуханию колебаний, но в нашем случае его можно не учитывать.

Иллюстрация А. Балдина

Радиоволна в плазме

Под действием внешних факторов (излучение, соударения) один или несколько электронов могут оторваться от атомов. Так возникают «свободные» электроны и ионы. Ионизированный газ называется *плазмой*. В нем обычно присутствуют и нейтральные частицы, но чем их меньше, тем ярче проявляются специфические свойства плазмы.

В нижних слоях атмосферы естественной плазмы почти нет, так как ионизирующее излучение Солнца (ультрафиолетовые и рентгеновские лучи) здесь очень сильно ослаблено. Начиная с высоты ~50 км и выше солнечная радиация ионизирует воздух все сильнее, и плотность плазмы возрастает. Здесь начинается ионосфера — плазменная оболочка Земли. На высотах 300—400 км плотность электронов и ионов становится максимальной, а далее медленно спадает, хотя интенсивность ионизирующих факторов с высотой возрастает. Просто на больших высотах плотность воздуха очень мала, и, хотя он почти полностью ионизирован, число «свободных» электронов и ионов все равно оказывается малым. В дальнем космосе степень ионизации очень высокая, и по современным представлениям примерно 99,9% видимой Вселенной находится в плазменном состоянии.

Вы, наверное, обратили внимание, что, говоря о плазменных электронах, мы заключаем слово «свободные» в кавычки. Дело в том, что плазменные электроны, хотя и оторваны от своих атомов, но взаимодействуют с другими электронами и ионами через электрические поля. Эти силы являются дальнодействующими, и именно с ними связаны специфические плазменные колебания.

Представим себе, что плотность электронов в каком-то небольшом объеме случайно возросла. Тогда здесь возникает избыток отрицательного заряда, и электрическое поле выталкивает электроны из этой области. Постепенно избыточный заряд ликвидируется, но электроны продолжают по инерции разлетаться. В результате число их в рассматриваемом объеме становится меньше среднего, а плотность положительных ионов остается прежней. Дефицит электронов равносилен появлению положительного заряда и электрического поля, притягивающего электроны обратно. Но двигающиеся назад электроны опять пролетают по инерции положение равновесия, опять создается избыток отрицательного заряда и т.д.

Для оценки частоты возникающих колебаний можно снова воспользоваться формулой (4), но вместо размеров атома a надо подставить в нее среднее (равновесное) расстояние между электронами. Пусть среднее число электронов в 1 м^3 равно N_0. Тогда расстояние между частицами равно $N_0^{-1/3}$. Положив в (4) $a = N_0^{-1/3}$, приходим к следующей формуле для собственной частоты колебаний электронов в плазме:

$$\omega_p \simeq \sqrt{\frac{ke^2N_0}{m}}. \qquad (5)$$

Если измерять частоту в герцах, а плотность электронов в м$^{-3}$, то после подстановки в (5) значений k, e и m получим следующее простое выражение:

$$f_p[\text{Гц}] \simeq 9\sqrt{N_0[\text{м}^{-3}]}.$$

Плотность электронов в области их наибольшей концентрации достигает 10^{12} м$^{-3}$, поэтому частота $f_p \sim 10$ МГц попадает в диапазон радиоволн. Это означает, что коэффициент преломления ионосферы может заметно отличаться от 1, а при $\omega \simeq \omega_p$ должна возникнуть сильная дисперсия. Действительно, формула для коэффициента преломления выглядит так:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \qquad (6)$$

Мы приводим ее без вывода, но главные особенности все же обсудим. Если увеличивать частоту радиоволны, переходя от $\omega < \omega_p$ к значениям $\omega > \omega_p$, то можно заметить, что при резонансе, когда $\omega = \omega_p$, свойства плазмы резко меняются. Когда $\omega < \omega_p$, подкоренное выражение в (6) является отрицательным, а коэффициент преломления — мнимым. Это означает, что столь низкочастотные волны в плазме распространяться не могут. Если же $\omega > \omega_p$, то $n < 1$ и все более приближается к 1 по мере возрастания частоты. Стремление $n(\omega)$ к 1 при $\omega \to \infty$ является характерным свойством не только плазмы, но и любых сред. Оно объясняется тем, что, в силу инерции, электроны не могут колебаться с бесконечно высокой частотой. Следовательно, вторичные волны в среде не возбуждаются, и электромагнитная волна распространяется так же, как в вакууме.

Согласно формуле (1), при $n < 1$ $v_ф > c$, т.е. волна распространяется в плазме со *сверхсветовой скоростью*. Может показаться, что таким образом нарушается принцип относительности Эйнштейна, согласно которому никакое воздействие (сигнал) не может распространяться со скоростью, превышающей c. Конечно, это не так. Вычисляемая по формуле (1) скорость относится к волне, имеющей какую-то одну определенную частоту. Такая волна представляет собой бесконечную синусоиду, которая сама по себе не может передать никакого сигнала, так как форма ее остается все время неизменной. Для передачи сообщения необходимо воспользоваться не одной волной, а группой волн разных частот, из которых можно сформировать сигнал требуемой формы. Скорость распространения всей группы волн отличается от скорости одной волны и определяется по формуле

$$v_{гр} = \frac{c}{n + \omega\dfrac{dn}{d\omega}}. \qquad (7)$$

Чтобы не путать эти два понятия, скорость, определяемую по формуле (1), называют фазовой (отсюда индекс «ф»), а по формуле (7) — групповой (индекс «гр»). В вакууме $n = 1$, а производная $dn/d\omega = 0$. Поэтому в вакууме $v_ф = v_{гр} = c$. Для плазмы же после вычисления $dn/d\omega$ с помощью (6) легко убедиться, что

$$v_ф v_{гр} = c^2.$$

Поскольку $v_ф > c$, $v_{гр} < c$, т.е. радиосигнал передается, как и должно быть, со скоростью меньшей c. При приближении ω к ω_p со стороны высоких частот $v_ф \to \infty$, а $v_{гр} \to 0$. Поэтому при $\omega \le \omega_p$ сигнал в плазме вообще не распространяется.

Радиоволны в магнитоактивной плазме

В космосе повсюду существуют магнитные поля. Они создаются электрическими токами (потоками заряженных частиц) и намагниченными небесными телами, к которым относится и наша Земля. Основное магнитное поле в ионосфере — это геомагнитное поле. О нем знает каждый, кто хоть раз пользовался компасом.

Нам предстоит выяснить, как изменится формула (6), если учесть, что плазма находится в постоянном магнитном поле (такую плазму называют *магнитоактивной*). Мы уже знаем, что дисперсионные свойства среды, т.е. вид функции $n(\omega)$, теснейшим образом связаны с собственными частотами колебаний электронов. При отсутствии постоянного магнитного поля плазменные электроны движутся (колеблются) одинаковым образом в любом направлении. Собственная частота таких изотропных (не зависящих от направления скорости) колебаний определяется формулой (5). Если же плазма находится в магнитном поле $\vec{B}_0$, то характер движения электронов радикально меняется: появляется очень сильная зависимость от направления скорости $\vec{v}$.

Напомним, что магнитное поле не оказывает силового воздействия на неподвижные заряды и заряды, двигающиеся вдоль линий магнитной индукции. Те же заряды, которые движутся перпендикулярно $\vec{B}_0$, испытывают силовое воздействие в направлении, перпендикулярном $\vec{v}$ и $\vec{B}_0$ (сила Лоренца). Величина этой силы, действующей на электрон, равна

$$F_л = ev_\perp B_0, \qquad (8)$$

где $v_\perp$ — проекция вектора скорости $\vec{v}$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{B}_0$.

Разложим произвольную скорость электрона $\vec{v}$ на продольную и поперечную составляющие: $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$. Движение вдоль $\vec{B}_0$ происходит точно так же, как и при отсутствии магнитного поля, поэтому продольная составляющая $\vec{v}_\parallel$ не «чувствует» присутствия $\vec{B}_0$. Колебания электронов в этом направлении характеризуются той же самой частотой ω_p, которая была определена ранее (формула (5)).

Совсем иначе движутся электроны в поперечной плоскости. Поскольку сила Лоренца перпендикулярна $\vec{v}_\perp$, величина скорости не меняется, но траектория все время искривляется. В результате электрон движется по окружности, радиус которой обозначим через ρ, а частоту вращения — через ω_B. Тогда $v_\perp = \rho\omega_B$, и

$$F_л = e\rho\omega_B B_0.$$

Снова вернемся к нашей исходной формуле (3), заменив в ней ω_0 на ω_B, l на ρ, а $F_э$ на $F_л$. В результате получим

$$\omega_B = \sqrt{e\omega_B B_0/m}$$

и, следовательно,

$$\omega_B = \frac{eB_0}{m}. \qquad (9)$$

Эта частота носит название *гирочастоты*, или *ларморовской* частоты электронов. В ионосфере $B_0 \sim 40$ мкТл и $\omega_B \sim 10^6$ с$^{-1}$. Эта частота попадает в радиодиапазон, и магнитное поле Земли будет оказывать существенное влияние на распространяющиеся в ионосфере радиоволны, если их частота ω окажется близкой к ω_B.

Нам остается выписать формулы для коэффициента преломления магнитоактивной плазмы. Здесь дело обстоит не так просто, потому что скорость распространения радиоволны зависит от того, в каком направлении относительно $\vec{B}_0$ происходит распространение. Кроме того, играет роль и структура электрического поля радиоволны — так называемая *поляризация*. Мы ограничимся рассмотрением только продольного распространения волны вдоль $\vec{B}_0$. Но и в этом случае имеются не одна, а две формулы для коэффициентов преломления (для волн разной поляризации), которые приводятся здесь без вывода:

$$n_1 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_B)}}, \qquad (10)$$

$$n_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_B)}}. \qquad (11)$$

Волны обыкновенные и необыкновенные

Условие резонанса, ранее сформулированное как совпадение частоты радиоволны с собственной частотой колебаний электронов (в данном случае $\omega = \omega_B$), является необходимым, но недостаточным. Надо еще, чтобы структура электрического поля радиоволны (поляризация) соответствовала характеру движения электронов. Поскольку электроны вращаются вокруг линий магнитной индукции $\vec{B}_0$ (рис.1), надо, чтобы электрическое поле радиоволны тоже вращалось. Но электрическое поле может вращаться в ту или иную сторону в зависимости от способа возбуждения радиоволны. Только в том случае, когда направления вращения электронов и поля совпадают, возникает резонанс на частоте $\omega = \omega_B$. При этом, как следует из (10), коэффициент преломления $n_1(\omega)$ бесконечно возрастает. В действительности, конечно, рост n_1 ограничен, и мы могли бы определить его предельное значение, если бы учли соударения электронов с другими частицами.

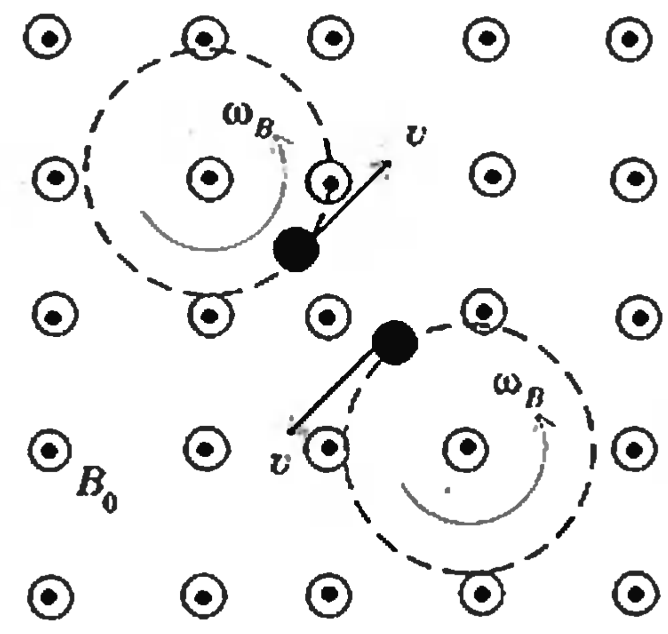


Рис. 1. Электроны в магнитном поле вращаются в одном и том же направлении при любой начальной скорости. Магнитное поле $\vec{B}_0$ направлено вверх из плоскости чертежа

Мы вскоре убедимся, что волна с коэффициентом преломления n_1 обладает весьма необычными свойствами. Поэтому ее называют *необыкновенной* волной. Если электрическое поле волны вращается в противоположном направлении, никаких особенностей при $\omega = \omega_B$ ожидать не следует. Действительно, формула (11) для n_2 подтверждает этот вывод. Вообще, свойства волны n_2 очень слабо отличаются от свойств волны в плазме без магнитного поля. Отсюда следует принятое для нее название — *обыкновенная* волна.

Особенности волн n_1 и n_2 четко обнаруживаются на низких частотах. Напомним, что в плазме без магнитного поля радиоволна с частотой $\omega <> \omega_p$ не может распространяться, так как подкоренное выражение в (6) становится отрицательным. Тем же свойством обладает и обыкновенная волна n_2, только предельно низкая частота определяется несколько иным неравенством: $\omega(\omega + \omega_B) < \omega_p^2$.

Совсем иначе ведет себя необыкновенная волна. Если $\omega < \omega_B$, второе слагаемое в подкоренном выражении в (10) становится положительным и *никаких ограничений со стороны низких частот для необыкновенной волны не существует*. Легко убедиться, что при распространении в ионосфере радиоволн килогерцевого диапазона выполняются следующие сильные неравенства: $\omega \ll \omega_B$ и $\omega \ll \omega_p^2/\omega_B$. При этом в формуле (10) для n_1 можно отбросить 1 в подкоренном выражении и записать ее в таком упрощенном виде:

$$n_1 \simeq \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega\omega_B}}. \qquad (12)$$

Напомним, что в плазме без магнитного поля коэффициент преломления всегда меньше 1. Здесь же, в силу сформулированных выше неравенств, $n_1 \gg 1$. Это означает, что рассматриваемая волна имеет очень малую по сравнению с c скорость ($v_\phi = c/n_1 \ll c$). Чтобы наглядно представить себе ее структуру, изобразим напряженность электрического поля волны в виде стрелки $\vec{E}$ и проследим за ее движением. Просматривая такой «мультфильм», мы увидели бы, что начало стрелки движется со скоростью v_ϕ вдоль линий магнитного поля $\vec{B}_0$, а ее конец вращается вокруг $\vec{B}_0$ с угловой скоростью ω, причем вектор $\vec{E}$ все время остается перпендикулярным $\vec{B}_0$ (рис.2).

Одновременно участие в поступательном и круговом движениях приводит к тому, что конец вектора $\vec{E}$ описывает винтовую спираль. Этим объясняется ее название – спиральная, или геликоидальная, волна (кратко – геликон). В литературе встречаются и другие синонимы: свистовая волна, просто свист или вистлер (от англ. whistle – свистеть). Однако последняя терминология не имеет никакого отношения к структуре электрического поля, а связана со своеобразными природными явлениями, в которых участвуют спиральные волны. Мы имеем в виду так называемые *свистящие атмосферики*. Именно они и используются для осуществления «наземно-космических» исследований, о которых мы обещали рассказать.

Свистящие атмосферики

Атмосферики – это естественные электрические разряды в атмосфере, связанные в основном с молниями. С ними легко познакомиться, включив радиоприемник во время грозы: треск и шум в нем – результат атмосфериков. Природа этих помех хорошо известна. При грозовом разряде возникают не только вспышки молний и раскаты грома, но и мощное радиоизлучение в широком диапазоне частот. Впервые это излучение было обнаружено еще в 1895 году, когда заработал грозоотметчик А.С.Попова. Из-за слабой чувствительности первые аппараты были способны обнаруживать только ближние грозы, но после изобретения ламповых усилителей появилась возможность регистрировать разряды молний на очень больших расстояниях. Тогда-то, в 1919 году, и появились первые сообщения о специфических радиосигналах, получивших название свистящих атмосфериков.

Атмосферики – радиоимпульсы с быстро меняющейся частотой, лежащей в килогерцевом диапазоне. Приемник, предназначенный для их регистрации, представляет собой просто усилитель низкой частоты (без детектора!). После усиления в приемнике импульсы воспринимаются на слух как своеобразный свист – отсюда их название.

Характерное время изменения частоты в одном импульсе составляет доли секунды – секунду, а периоды колебаний $T = 1/f$ значительно короче – порядка $10^{-3} - 10^{-4}$ с. Поэтому можно говорить о «мгновенной частоте» $f(t)$ для данного момента времени t. Далее мы убедимся, что зависимость частоты от времени несет на себе информацию о параметрах космической плазмы на расстояниях в тысячи километров от Земли.

Как правило, регистрируются не одиночные сигналы, а серии импульсов, следующих друг за другом с интервалами, также измеряемыми секундами. Вскоре после открытия свистящих атмосфериков стало ясно, что вся серия порождается одним атмосферным разрядом и представляет собой многократные эхо-сигналы. Но как объяснить столь длительные (секундные) задержки? В пределах земного шара просто нет таких больших расстояний. Ведь даже кругосветное эхо радиоволны, бегущей со скоростью света, появляется примерно через 0,13 с. Решающая гипотеза была высказана только в начале 50-х годов. Суть ее заключается в предположении, что импульсы распространяются от молнии к приемнику не вдоль земной поверхности, а через космическое пространство по линии магнитного поля Земли между магнитосопряженными точками[1] (рис.3). Если разряд произошел недалеко от приемника, сначала регистрируется первичный атмосферик (он проходит вдоль Земли и воспринимается на слух как кратковременный треск, который называют сфериком), а спустя некоторое время – свист, прошедший по магнитной линии до

[1] *Магнитосопряженные точки – точки на поверхности Земли, лежащие на одной магнитной линии.*

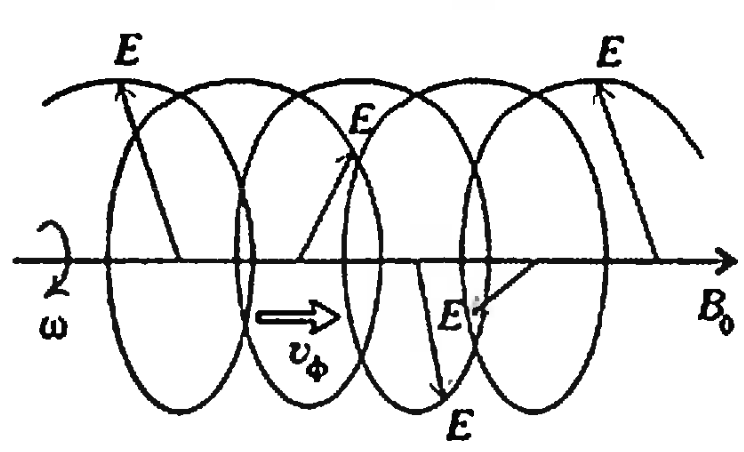


Рис.2. Спиральная волна, распространяющаяся в плазме вдоль постоянного магнитного поля $\vec{B}_0$ с фазовой скоростью v_ϕ. Конец вектора E описывает спираль, вращаясь с угловой скоростью ω

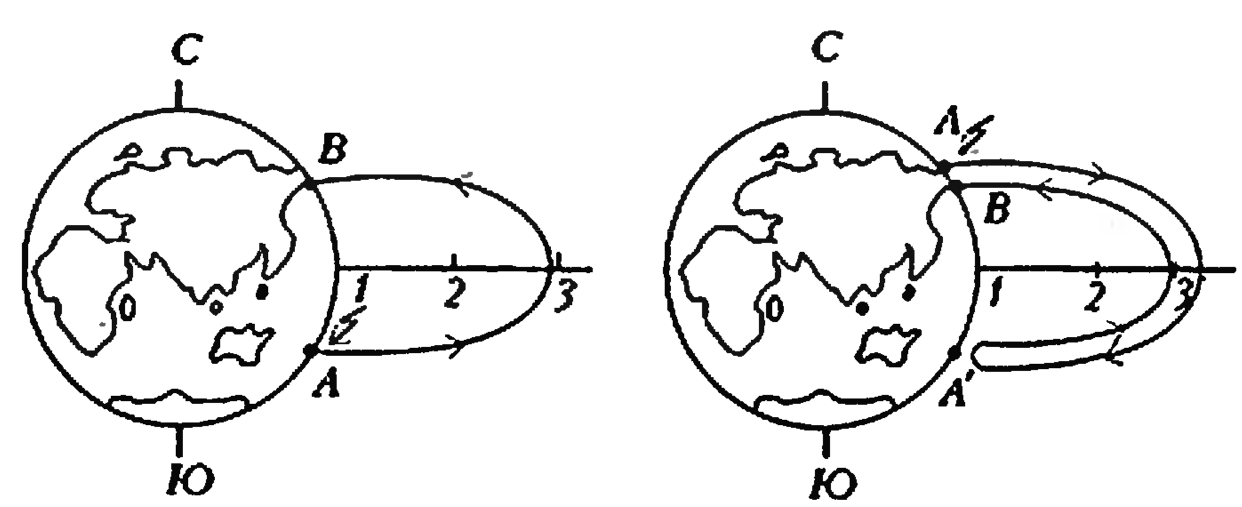


Рис.3. Схемы возникновения короткого (слева) и длинного (справа) свистов. Здесь А – место разряда молнии, В – приемник, A' – точка отражения сигнала. Расстояние указано в радиусах Земли

противоположного полушария и возвратившийся после отражения от Земли тем же путем (длинный свист). Когда молния и приемник находятся в разных полушариях, сферик отсутствует, и сразу же регистрируется свистящий атмосферик (короткий свист). В обоих случаях часто наблюдаются многократные эхо (до 20 отражений) с соотношениями интервалов 2 : 4 : 6... — для длинных и 1 : 3 : 5... — для коротких свистов (см. рис.3).

Предположение о распространении вдоль геомагнитных линий естественным образом объясняет также и такие особенности свистов, как возрастание времени задержки сигналов с географической (точнее, с магнитной) широтой места наблюдения и редкие появления свистов в низких широтах. Важным подтверждением высказанной гипотезы явились эксперименты с искусственными источниками, выполненные впервые в 1958 году. Сигналы передатчика, работающего на частоте 15,5 кГц, принимались в другом полушарии с задержкой $t \simeq 0{,}7$ с, свистящие атмосферики, зарегистрированные на той же трассе и частоте, имели такую же задержку. Она соответствовала расчетной длине геомагнитной линии.

Наблюдаемую задержку можно объяснить с помощью ранее полученных результатов. Напомним, что сигнал распространялся в плазме с групповой скоростью $v_{гр}$, которая вычисляется по формуле (7). Если воспользоваться упрощенным выражением (12) для коэффициента преломления свистовой волны, то легко убедиться, что

$$\omega\frac{dn}{d\omega} = -\frac{n_1}{2},$$

и

$$v_{гр} = 2v_{ф} = \frac{2c}{n_1} = \frac{2c\sqrt{\omega\omega_B}}{\omega_p}.$$

Длина трассы L и время задержки t связаны друг с другом обычным соотношением $L = v_{гр}t$. Однако следует учесть, что значения ω_B и ω_p меняются вдоль трассы, а вместе с ними изменяется и величина $v_{гр}$. Поэтому в приведенной выше формуле надо взять некоторое среднее значение $v_{гр}$. Можно ориентироваться на следующие, характерные для высот в несколько тысяч километров, величины индукции магнитного поля и электронной концентрации: $B_0 \sim 40$ мкТл, $N_0 \sim 10^9$ м$^{-3}$. Взяв также частоту $\omega \sim 10^4$ с$^{-1}$, найдем $n_1 \sim 10$ и $v_{гр} \sim 6\cdot10^7$ м$\cdot$с$^{-1}$. Если учесть, что длина магнитной линии между магнитосопряженными точками в рассматриваемом эксперименте была равна $L \simeq 40$ тыс. км, то найденной выше групповой скорости соответствует время задержки $t = L/v_{гр} \sim$ $\sim 0{,}67$ с, что хорошо согласуется с наблюдениями и подтверждает предположение о том, что свистящий атмосферик — это те самые спиральные волны в магнитоактивной плазме, о которых мы ранее рассказывали.

Не представляет труда рассчитать и функциональную связь между временем задержки и частотой сигнала. Для этого подставим в формулу $t =$ $= L/v_{гр}$ найденное ранее значение $v_{гр}(\omega)$. В результате получим $t =$ $= L\omega_p\big/\left(2c\sqrt{\omega_B\omega}\right)$. Эту формулу обычно записывают в виде

$$t = \frac{D}{\sqrt{f}}$$

где $D = L\omega_p\big/\left(2c\sqrt{2\pi\omega_B}\right)$. Коэффициент D не зависит от частоты, но зависит от параметров плазмы и длины трассы, по которой проходит атмосферик. Этот коэффициент носит название дисперсии свиста. Его определяют экспериментально, анализируя зависимости $f(t)$, т.е. спектрограммы свистящих атмосфериков (рис.4). Потом по найденному значению D делают выводы о величине электронной концентрации и индукции магнитного поля.

Связь свистящих атмосфериков с разрядами молний не вызывает сомнения, но существует кажущееся противоречие, которое следует разъяснить. На земном шаре бушуют одновременно приблизительно 2000 гроз и вспыхивают в среднем около 100 молний в секунду. В то же время темп регистрации свистов в средних широтах характеризуется единицами в минуту. Почему же столь различно число молний и число свистов? Дело вот в чем. Не каждый разряд порождает свистящий атмосферик, который можно обнаружить в данном пункте наблюдения. Для обнаружения необходимо, чтобы приемник располагался не очень далеко либо от места разряда, либо от его магнитосопряженной точки. Однако грозы распределены на земном шаре очень неравномерно. Чаще всего они происходят в экваториальных районах, но именно там свисты не наблюдаются из-за неподходящей геометрии геомагнитного поля (магнитные линии мало удаляются от поверхности Земли). Существует еще одна причина снижения темпа регистрации. Свистящий атмосферик возникает только тогда, когда радиоимпульс захватывается магнитной линией — «прилипает» к ней. Но для этого нужны особые условия, которые отнюдь не всегда реализуются. Для «прилипания» необходимо, чтобы существовали плазменные неоднородности, вытянутые вдоль магнитного поля. Правда, даже в однородной магнитоактивной плазме направление потока энер-

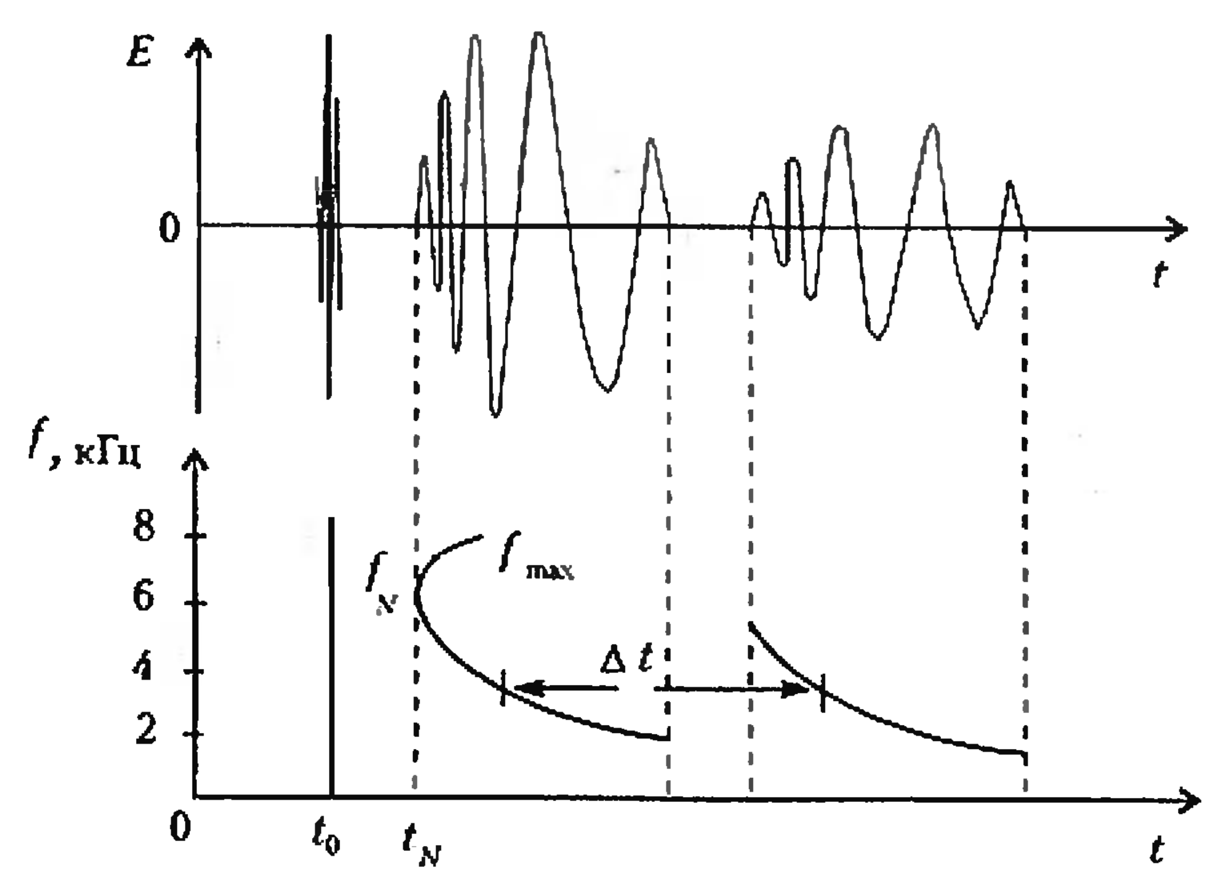


Рис.4. Свистящий атмосферик (сверху) и его спектрограмма. В момент t_0 произошел разряд молнии, который возбудил одновременно все частоты (вертикальная линия на нижнем графике); в момент t_N появился «нос» атмосферика. Спустя некоторое время Δt приходит сигнал, отраженный от магнитосопряженной точки в другом полушарии

гии спиральной волны приближается к направлению $\vec{B}_0$. Расчеты показывают, что предельный угол отклонения групповой скорости от этого направления близок к 20°, если частота ω много меньше гирочастоты ω_B. Однако само по себе это обстоятельство не обеспечивает распространения свиста вдоль линии геомагнитного поля. Вот при наблюдениях свистящих атмосфериков со спутника число их значительно выше, чем при наземной регистрации, так как на космическом аппарате принимаются все сигналы, а не только те, которые захватываются в волноводный канал.

Измерение параметров космической плазмы

Геомагнитная линия, вдоль которой распространяется свистящий атмосферик, может удаляться от поверхности Земли на десятки тысяч километров в зависимости от геомагнитной широты пункта наблюдения. Поэтому изменения, которые происходят с радиоимпульсом на пути его следования, несут информацию о свойствах среды на очень больших высотах. Вычисляя запаздывание сигнала в неоднородной плазме, можно показать, что дисперсия D как бы набирается по всей траектории сигнала, причем вклад тех участков траектории, где поле B_0 мало, особенно велик. Такое утверждение станет понятным, если вспомнить, что в формуле для D частота ω_B стоит под корнем в знаменателе, и, следовательно, $D \sim 1/\sqrt{B_0}$. Из-за этого, хотя определить непосредственно плотность плазмы на различных высотах по измеренной величине D нельзя (в формулу входит только интегральная концентрация вдоль всей трассы), можно проконтролировать правильность тех или иных моделей распределения N_0 с высотой. Особенно ценно то, что, благодаря быстрому убыванию B_0 с удалением от Земли, основной вклад в дисперсию дают значения N_0 в окрестности вершины траектории, т.е. на самых больших высотах.

Свистящие атмосферики уже сыграли и продолжают играть заметную роль в исследованиях околоземного космического пространства. Полученные с их помощью данные привели к пересмотру сложившихся ранее представлений об ограничении ионосферы Земли самое большее несколькими тысячами километров. Вывод о достаточно высокой концентрации электронов на больших расстояниях вытекал из анализа свистов, а в дальнейшем получил непосредственное подтверждение в прямых измерениях на спутниках и ракетах.

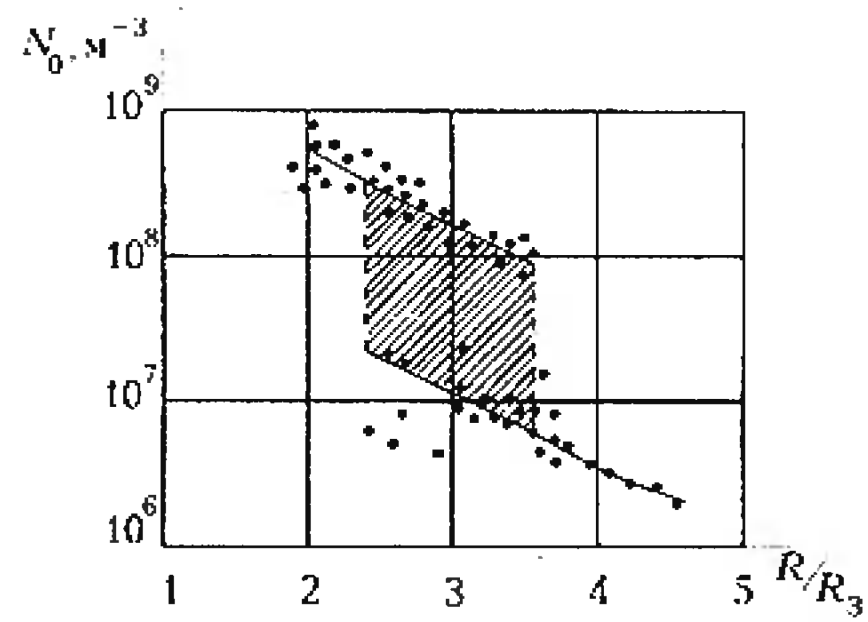


Рис.5. Резкое изменение электронной концентрации («колено») на границе внутренней области магнитосферы (заштрихованная область). Экспериментальные точки получены с помощью свистящих атмосфериков. Расстояние от Земли выражено в земных радиусах

Интересна история открытия так называемого «колена» — резкого уменьшения электронной плотности на высоте 15 – 25 тыс. км (рис.5). Здесь проходит граница внутренней области магнитосферы, заполненной сравнительно плотной плазмой ($N_0 \gtrsim 10^8$ м$^{-3}$), вращающейся вместе с Землей. Доказательства существования столь обширной плазменной оболочки Земли дали измерения на советской космической ракете в 1959 году и на американском спутнике «Эксплорер-1» в 1963 году. Результаты, получаемые с помощью свистящих атмосфериков, также подтверждают наличие «колена» и дают возможность регулярно регистрировать границу области с точностью до 0,1 радиуса Земли.

Мы проиллюстрировали работоспособность свистов на примере определения электронной концентрации. При этом использовалось соотношение (13), которое, напомним, справедливо в ограниченном интервале частот — примерно от 1 до 7 кГц. На более высоких частотах нарушится условие $\omega \ll \omega_B$, использованное при выводе приближенной формулы для $n_1(\omega)$, а ограничение по частоте снизу связано с тем, что мы с самого начала пренебрегали движением ионов.

Если диапазон частот, в котором регистрируется атмосферик, расширить, то открываются дополнительные возможности, о которых мы здесь только упомянем. Часто наблюдаются свистящие атмосферики с минимальным временем прихода на определенной частоте, которая называется носовым свистом (частота f_N на рисунке 4). Далее возникают две ветви спектрограммы: восходящая с обрывом на некоторой частоте f_{max} и нисходящая, переходящая в исследованную нами область. В этом диапазоне частот, где $\omega \lesssim \omega_B$, влияние магнитного поля проявляется сильнее, и здесь свист играет роль своеобразного «магнитометра».

На очень низких частотах наблюдаются так называемые «ионные свисты». Их спектрограммы несут информацию о массах ионов, что позволяет по существу выполнить химический анализ газа на расстояниях в десятки тысяч километров от Земли. Но и это еще не все. Более точные формулы для $n_1(\omega)$ включают в себя зависимость от температуры электронов, а это открывает возможности использования свистов как дистанционных «термометров».

Подведем итоги нашего рассказа. Создание ракет и космических кораблей, оснащенных сложными измерительными приборами, заслуженно вызывает восхищение перед возможностями человеческого разума. Но разве менее удивителен тот факт, что стоило «только» хорошо подумать, и очень много о космосе удалось узнать, не покидая поверхности Земли. Сама природа обеспечила нам возможность дистанционных космических измерений, создав мощные радиопередатчики — молнии и проложив тысячекилометровые каналы — волноводы вдоль геомагнитных линий от одного полушария Земли к другому через космос. Все это существовало столько лет, сколько существует наша планета, но только изобретение радио позволило воспользоваться столь удивительным «инструментом».

Иллюстрация Г.Гончарова

Посвящается Ф.И.Карпелевичу, замечательному математику, собравшему в 70-х годах на кафедре высшей математики МИИТа славную плеяду молодых выпускников мехмата МГУ в надежде, что хоть кто-то из них решит хоть какую-нибудь железнодорожную проблему.

Сортировки, числа Фибоначчи, системы счисления и контекстно-свободные грамматики

А.КУЛАКОВ

Вагоны шли привычной линией,
Подрагивали и скрипели,
Молчали желтые и синие,
В зеленых плакали и пели.

А.Блок

Введение и задачи

Кто из вас, дорогой читатель, не сталкивался с железной дорогой? Не стоял в очередях за билетами? Не ездил в грязных вагонах? Казалось бы, какая может быть математика на железных дорогах? Все простые задачи решены еще в прошлом веке. Остались очень сложные, скорее физические задачи, в которых большие сложные системы дифференциальных уравнений, описывающих движения больших составов, нужно численно решать на мощных компьютерах. Но, оказывается, и сейчас еще могут встретиться задачи, которые школьник не только может решить, но и помочь своими решениями железнодорожникам. Интересно то, что похожие задачи встречаются при проектировании компьютеров и при создании операционных систем к ним. Что же может быть общего между

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

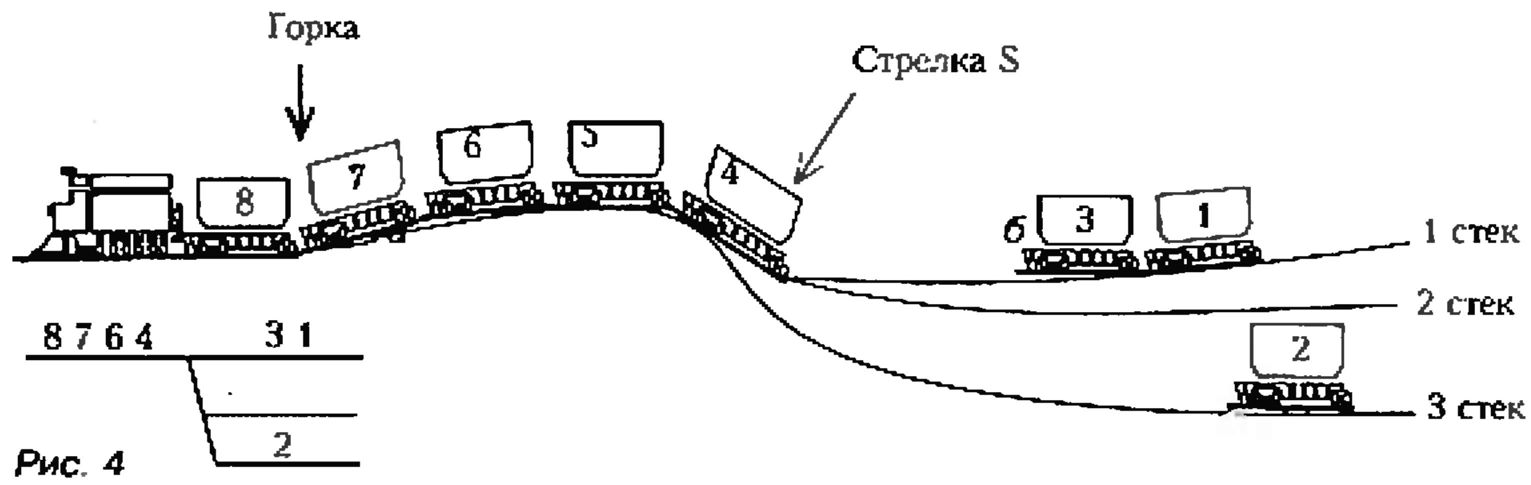


Рис. 4

компьютерами и железными дорогами?

Речь в статье пойдет о сортировках. Кто из вас наблюдал, как на сортировочной горке сортируются железнодорожные составы? *Горкой* груда путей называется потому, что в профиль действительно имеет вид горки.

У железнодорожников даже выработалась своя терминология: *надвигом* называется вталкивание состава на горку (рис.1), скатывание отцепленного вагона с горки называется *роспуском* (рис.2), а сам этот вагон называется *отцепом*, торможение отцепа внизу горки (а каждый вагон обязательно нужно тормозить — ведь при ударе тела испытывают огромные напряжения и разрушаются) называется *осаживанием*. Операция, изображенная на рисунке 3, называется *вытягиванием*.

На больших сортировочных узлах число тупиков очень велико, поэтому любой состав всегда можно отсортировать за один или два роспуска. А что делать на маленьких станциях, где есть два-три тупика, да и то один может быть занят частично?

Прежде чем идти дальше, давайте договоримся о терминологии. Будем операцию, изображенную на рисунках 1 и 2, называть, как и железнодорожники, роспуском состава или просто роспуском, а на рисунке 3 — вытягиванием. Роспуск и все следующие за ним вытягивания до следующего роспуска состава или его части назовем *шагом* сортировки. Тупики горки, используя компьютерную терминологию, назовем *стеками*. Стекам можно присваивать номера 0, 1, 2, ... и т.д., а саму горку будем условно изображать, как на рисунке 4.

Будем через k обозначать число стеков, а через p — число вытягиваний. Кроме того, договоримся считать состав отсортированным, если вагоны в нем идут в порядке возрастания нумерации слева направо (рис.5,*л*). Вагоны состава, поступающего на сортировку, уже имеют нумерацию. Ведь после сортировки состав следует по маршруту, встречая на своем пути станции-получатели вагонов в определенном порядке. Этот порядок и определяет номера вагонов. Мы будем считать, что вагоны состава, подаваемого на сортировку, пронумерованы так, чтобы отсортированный состав мог спокойно следовать по своему маршруту и на каждой станции от хвоста состава можно было отцепить направляемые на эту станцию вагоны.

Задача 1. Как бы вы предложили нумеровать вагоны, если получателю неважно, в каком порядке он получит свои вагоны?

Пример 1. На рисунке 5, *а*—*л*, приведен подробный пример сортировки состава из 5 вагонов, поданных на горку, имеющую 2 стека, в порядке, изображенном на рисунке 5, *а*. Сортировка состоит из двух шагов, первый шаг (рис.5,*б*—*е*) и второй шаг (рис.5,*ж*—*л*) включают в себя по два вытягивания. Итак, мы отсортировали состав из 5 вагонов за 2 шага, совершив 4 вытягивания.

Можно несколько формализовать наши определения. Представим себе, что элементы σ_i лежат в стопке (σ_1 сверху, σ_n снизу) на некотором выделенном месте, которое мы

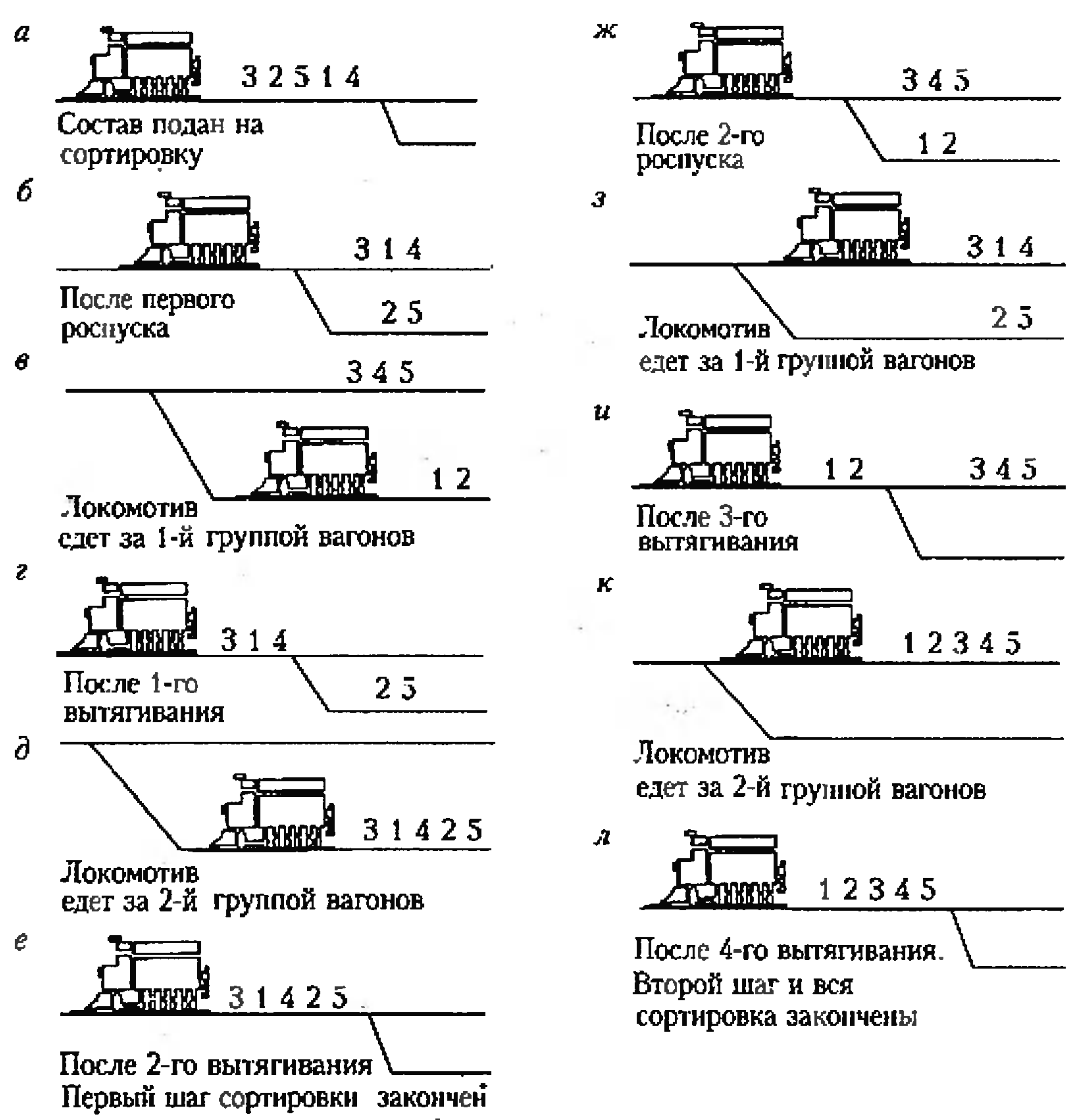


Рис. 5

будем называть *горкой*. Фиксировано число k. Разрешается, вынимая элементы снизу стопки, раскладывать их на k стопок, т.е. элементы в стопках расположены в том же порядке, что и в стопке на горке. Эти новые стопки и есть стеки, а описанная операция — роспуск. Дальше все элементы из некоторого стека можно переносить на горку, не меняя порядок. Эта операция — вытягивание. Перемещать элементы на горку можно из нескольких стеков. Будем считать (хотя это не принципиально), что элементы из следующего стека подкладываются снизу под стопку, уже существующую на горке. В конце мы хотим получить упорядоченное множество 1, 2, 3, ..., n. Шагом называются все действия между двумя последовательными роспусками.

Прежде чем читать дальше, попробуйте самостоятельно решить несколько задач. Во всех задачах, если не оговорено противное, будем считать, что все стеки «бесконечные», т.е. могут вместить сколько угодно вагонов, хоть весь состав.

Задачи

2. Докажите, что каждый состав можно отсортировать за $n - 1$ шаг и $2n - 2$ вытягивания.

3. Отсортируйте состав, идущий в порядке 4, 3, 2, 1, на горке с двумя стеками ($k = 2$)

а) за наименьшее число шагов;

б) за наименьшее число вытягиваний.

4. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, на горке с двумя стеками ($k = 2$)

а) за наименьшее число шагов;

б) за наименьшее число вытягиваний.

5. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, на горке с тремя стеками ($k = 3$)

а) за наименьшее число шагов;

б) за наименьшее число вытягиваний.

6. Отсортируйте состав, идущий в порядке 5, 7, 1, 3, 2, 6, 4, на горке с двумя стеками ($k = 2$)

а) за наименьшее число шагов;

б) за наименьшее число вытягиваний.

7. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке 15, 4, 12, 7, 11, 9, 8, 10, 13, 5, 1, 6, 3, 2, 14, на горке с двумя стеками ($k = 2$). Сколько шагов вам понадобится для этого? А сколько вытягиваний?

Как вы уже поняли, мы разделили каждую задачу о сортировке на две:

(1) первая — это задача о сортировке за наименьшее число шагов,

(2) вторая — это задача о сортировке за наименьшее число вытягиваний, ведь именно вытягивание — та реальная операция, которую приходится проделывать машинисту маневрового локомотива.

Задачи

8. Попробуйте отсортировать состав 1, 11, 12, 5, 13, 10, 2, 4, 9, 7, 6, 14, 3, 8, 15 на горке, имеющей 3 стека. В каком из ваших вариантов число вытягиваний минимально?

9. а) Придумайте алгоритм сортировки, который каждый состав из n вагонов на горке с k стеками сортирует за число шагов s, где $k^{s-1} < n \le k^s$.

б) Докажите, что ваш алгоритм правильно сортирует любой состав.

в) Докажите, что существует состав из n вагонов, который нельзя отсортировать за меньшее число шагов.

Приступим к решению первой задачи.

О системах счисления

Прежде чем описать алгоритмы сортировок составов, вспомним системы счисления. Мы с детства привыкаем к тому, что любое число можно записать с помощью девяти цифр:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9.$$

Значение каждой цифры зависит от того места, на котором эта цифра стоит. Например, число 905, записанное цифрами 9, 0, 5, равно $9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5$, число $\overline{590} = 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 0$, а число $\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ (обычно над набором цифр сверху ставят черту, для того чтобы не спутать десятичную запись числа с произведением его цифр).

Число 10, лежащее в основании нашей системы счисления, можно заменить на любое другое число, например на 2. В этой системе счисления всего две цифры — 0 и 1. Для того чтобы записать число в двоичной системе, его нужно представить в виде суммы степеней двойки. Например, $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 2^2$, $5 = 4 + 1$, и т.д. Если $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots$, то его двоичной записью будет набор из нулей и единиц, в котором единицы стоят на n_i-х местах, считая справа, а на остальных местах стоят нули. Например, $13 = 8 + 4 + 1$, следовательно, $13 = 1101_2$.

Вместо числа 2 в основу системы счисления можно положить произвольное натуральное число q. Такая система называется q-ичной (2-ичная, 3-ичная, ..., 10-тичная, и т.д.). В ней для записи чисел используется q цифр: $0, 1, 2, \ldots, q-2, q-1$. q-ичной записью числа $m = a_n q^n + \ldots + a_1 q + a_0$, где все a_i — цифры q-ичной системы $(0 \le a_i \le q - 1)$, служит запись $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_q$ (индекс q внизу показывает основание системы счисления; он не пишется, если понятно, о какой системе идет речь). Например, $25_{10} = 221_3$, или $1996_{10} = 5551_7$, или $111111_{10} = B207_{16}$.

Последняя, шестнадцатеричная система счисления широко распространена в программировании (запись адресов в современных компьютерах в 2-ичной системе слишком длинна). В ней используется 16 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $A(=10)$, $B(=11)$, $C(=12)$, $D(=13)$, $E(=14)$, $F(=15)$.

Теперь сформулируем алгоритм поразрядной сортировки. Мы сформулируем его для сортировочной горки с двумя стеками, но он естественно обобщается на произвольные k.

Замечание 1. Число 0 в системах счисления во всех разрядах имеет одни нули. Будем поэтому нумерацию вагонов начинать с 0.

Алгоритм поразрядной сортировки

(1) Напишем номера наших вагонов в 2-ичной системе счисления, начиная с 0. Нумерация разрядов: от младшего, нулевого разряда единиц к старшему.

(2) Дадим стекам номера 0 и 1.

(3) Сортировка начинается с нулевого шага. k-й шаг сортировки состоит в следующем: при роспуске состава вагоны, номера которых в k-м

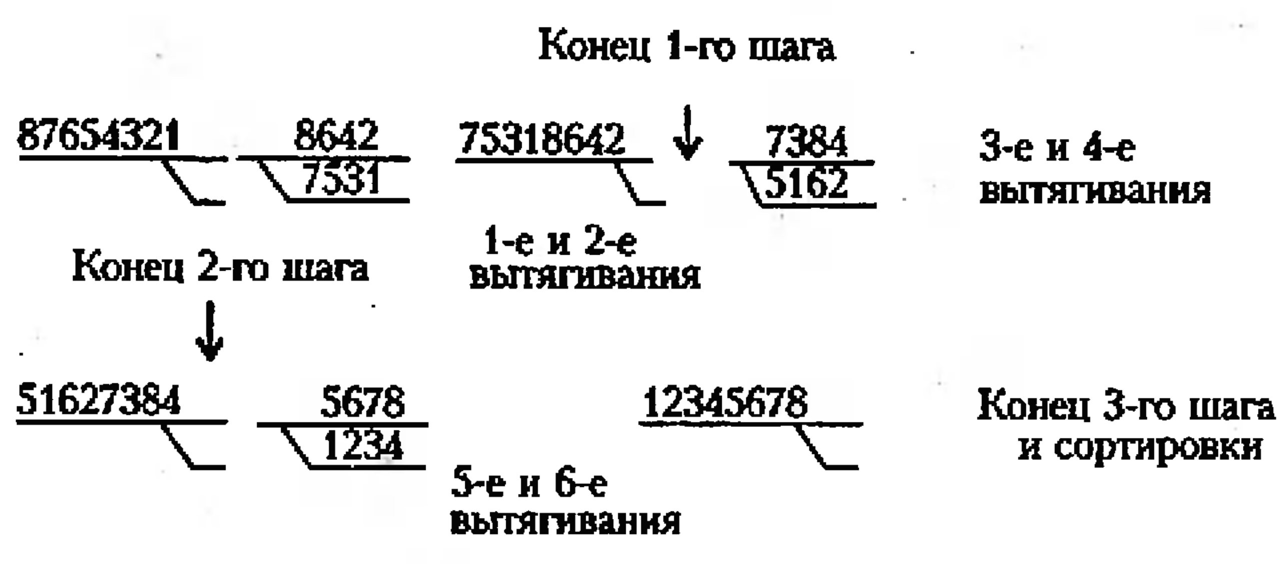


Рис. 6.

разряде имеют цифру 0, отправляются в 0-й стек, а номера которых в k-м разряде имеют цифру 1, отправляются в 1-й стек. После роспуска вытягиваются сначала вагоны из 0-го стека, а затем из 1-го. На этом k-й шаг сортировки заканчивается.

Посмотрим на примере решения задачи 4,а), как работает наш алгоритм (рис.6). Из рисунка видно, что для сортировки потребовалось сделать 3 шага ($8 = 2^3$) и $6 = 2\times3$ вытягиваний. Теперь понятно, что нужно делать, если у сортировочной горки 3 стека — нужно записывать номера вагонов в 3-ичной системе счисления и сортировать по разрядам 3-ичной системы.

Чтобы освоиться теперь с алгоритмом поразрядной сортировки, решите с его помощью задачи 3,а)–6,а). Совпадают ли эти решения с вашими?

Основные утверждения

Приведем одно очевидное утверждение, с которого начинаются решения наших задач.

Лемма 1. *Если два вагона попадают в один стек, то порядок между ними не меняется.*

Теорема 1. *Алгоритм поразрядной сортировки решает задачу 9.*

Вспомним, как мы сравниваем два числа $a = a_s a_{s-1} \ldots a_0$ и $b = b_s b_{s-1} \ldots b_0$. Мы всегда будем считать, что их записи выровнены по разрядам (в крайнем случае можно приписать нули). $a < b$ тогда и только тогда, когда $a_s = b_s$, $a_{s-1} = b_{s-1}$, ..., $a_{l+1} = b_{l+1}$, а $a_l < b_l$.

Посмотрим, что происходит с вагонами a и b при поразрядной сортировке. Первые $(l-1)$ шагов вагоны a, b как-то шатаются по стекам. Абсолютно не важно, как. На l-м шаге вагон a попадает в стек с номером a_l, а вагон b попадает в стек с номером b_l. Так как $a_l < b_l$, то вагон a будет вытянут на этом шаге перед вагоном b и окажется левее b. Но во всех старших, чем l, разрядах у a и b стоят одинаковые цифры, поэтому во все последующие роспуски вагоны a и b будут попадать в одни и те же стеки. Значит, по лемме 1 их порядок не изменится. Следовательно, в конце сортировки вагон a будет находиться левее b. А так как это верно для любой пары вагонов, то весь состав будет упорядочен.

Заметим, что точно так же упорядочены слова в словаре. Такой порядок называется *лексикографическим.*

Необходимое для записи числа n число разрядов в k-ичной системе счисления ограничено сверху числом $\lceil \log_k n \rceil$, значит, и число шагов в поразрядной сортировке состава из n вагонов ограничено сверху $\lceil \log_k n \rceil$, где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее чем x.

Определение 1. Множество 1, 2,... ..., $n-1$, n в перепутанном порядке $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$ называется *перестановкой.*

Вообще-то, перестановкой в математике называется взаимно-однозначное отображение $\sigma: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, но в нашей задаче можно не различать перестановку σ и результат ее действия.

Назовем множество элементов $\{\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \sigma_{k_3}, \ldots, \sigma_{k_s}\}$ перестановки $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n\}$ *обратной цепью*, если $\sigma_{k_i} > \sigma_{k_{i+1}}$, $k_i < k_{i+1}$. Обратная цепь, состоящая из наибольшего числа элементов, называется *максимальной.* Обозначим длину максимальной обратной цепи $f(\sigma)$.

Из принципа Дирихле следует, что длина максимальной обратной цепи $f(\sigma)$ за один шаг может уменьшиться не более чем в k раз. Действительно, распуская состав в k стеков, мы делим максимальную обратную цепь на k обратных цепей, поэтому длина максимальной обратной цепи в получившейся перестановке не меньше $\dfrac{f(\sigma)}{k}$.

Это дает оценку снизу, а так как наибольшей максимальной обратной цепью обладает перестановка $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ и ее длина равна n, то эту перестановку нельзя отсортировать за меньшее, чем $\lceil \log_k n \rceil$, число шагов.

Теперь возникает вопрос, что делать с каждой конкретной перестановкой. Например, состав уже отсортирован, т.е. идет в порядке 1, 2, 3, ..., $n-1$, n. Было бы глупо его сортировать.

Упражнение 1. Посмотрите, что произойдет с этим составом, если к нему применить поразрядную сортировку, например, при $k = 2$?

Опять выручает лемма 1. Из нее следует уже менее очевидное утверждение.

Лемма 2. *Пусть в составе $(i+1)$-й вагон расположен правее i-го. Тогда для любого алгоритма (A), сортирующего состав, существует алгоритм (B), который не «хуже первого» (это означает, что новый алгоритм делает не больше шагов и не больше вытягиваний) и который при сортировке все время отправляет i-й и $(i+1)$-й вагоны в один стек.*

Действительно, изменим алгоритм (A): пусть в алгоритме (B) все вагоны попадают в те же стеки, что и в алгоритме (A), за исключением $(i+1)$-го — $(i+1)$-й вагон всегда распускается в тот же самый стек, что и i-й вагон в алгоритме (A). Ясно, что число вагонов между i-м и $(i+1)$-м вагонами не увеличивается. Пусть в самом начале между i-м и $(i+1)$-м вагонами стоял вагон с номером j. Если бы в алгоритме (A) j-й вагон все время попадал в тот же стек, что и i-й, то в конце мы получили бы неотсортированный состав. А так как состав в конце работы алгоритма (A) отсортирован, это означает, что в какой-то момент вагоны i и j попадают в разные стеки, и число вагонов между i-м и $(i+1)$-м уменьшается. А так как это верно для любого вагона, находящегося в начале между i-м и $(i+1)$-м вагонами, то в конце работы алгоритма (B) они будут стоять рядом и в нужном порядке. Это завершает доказательство леммы 2.

Следовательно, если в составе $(i+1)$-й вагон расположен правее i-го, то оба эти вагона каждый раз можно отправлять в один стек. А это, в свою очередь, означает, что эти вагоны не нужно различать и, следовательно, им нужно дать одинаковые номера.

Определение 2. Назовем каждую максимальную последовательность i, $i+1$, $i+2$, ..., $i+m$, в которой каждый следующий элемент стоит в перестановке правее предыдущего, *блоком.* Ясно, что элементам в блоке нужно давать один и тот же номер. Назовем эту операцию *перенумерацией.*

Пример 2. В составе из задачи 6 (5, 7, 1, 3, 2, 6, 4) 4 блока (1, 2; 3, 4; 5, 6 и 7), после перенумерации он будет выглядеть так: 2, 3, 0, 1, 0, 2, 1. А как выглядят после перенумерации составы из задач 7 и 8?

Лемма 3. *Пусть алгоритм (A) сортирует состав из n вагонов, идущих в обратном порядке. Тогда этот алгоритм так же (т.е. за такое же* *число вытягиваний и шагов) сортирует состав, в котором после перенумерации n блоков. И наоборот.* (Под «так же» понимается, что на каждом шаге вагоны с тем же самым номером отправляются в тот же самый стек и вытягиваются вагоны из тех же стеков в том же порядке.)

Очевидно, что нужно наблюдать за крайним правым вагоном из i-го блока и крайним левым вагоном из $(i+1)$-го. Рассуждения такие же, как и в лемме 2.

Из леммы 3 мы получаем уже совершенно нетривиальное

Следствие 1. *Общую задачу решает алгоритм, оптимально сортирующий состав, вагоны в котором расположены в обратном порядке.*

Итак, доказана

Теорема 2. *Любую перестановку σ можно отсортировать на горке с k стеками за не более чем s шагов, где $k^{s-1} < n \le k^s$, а n — число блоков, и эта оценка неулучшаема.*

Итак, задача об алгоритме сортировки за наименьшее число шагов решена, причем не только в целом, но и для каждой конкретной перестановки.

Замечание 2. Кто из вас, дорогой читатель, не играл хоть раз в жизни в карты? Наверное, все когда-нибудь держали в руках колоду карт и тасовали ее. Существует несколько способов тасования колоды карт. Один из них называется врезка. Колоду карт делят на две, не обязательно равные, части. После этого одну из частей, не меняя в ней порядок, вставляют в другую так, что карты из разных частей перемежаются.

А задавал ли кто-нибудь из вас себе такой вопрос: за какое наименьшее число врезок колоду можно перевести из одного положения в другое?

Я думаю, вы уже догадались, что ответ и на этот вопрос содержится в этой статье. Ведь операция врезки — это операция обратная роспуску и последующему вытягиванию из обоих стеков на горке с двумя стеками.

Задача 10. Сформулируйте ответ на поставленный вопрос.

А как же наименьшее число вытягиваний? Сортируя состав из n блоков по алгоритму поразрядной сортировки на горке с k стеками, мы делаем $\lceil \log_k n \rceil$ шагов и $k \times \lceil \log_k n \rceil$ вытягиваний. Это число равно $k \times \left\lceil \frac{1}{\ln k} \ln n \right\rceil$ (вот зачем нужно уметь пользоваться свойствами логарифмов). Конечно, число вытягиваний — целое число, но мы рассмотрим функцию $\frac{k}{\ln k} \ln n$. Последний сомножитель $\ln n$ не зависит от k, поэтому посмотрим на коэффициент перед $\ln n$: $g(k) = \frac{k}{\ln k}$. Более того, рассмотрим эту функцию не только при целых k, но и при любых действительных x.

Задача 11. Докажите, что функция $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ имеет минимум при $x = e$.

Ближайшие к e целые числа — это 2 и 3. При этом $\frac{2}{\ln 2} \ge \frac{3}{\ln 3}$ (это упражнение). Поэтому для алгоритма поразрядной сортировки самое выгодное k в смысле вытягиваний — это $k = 3$.

Но так уж устроен человек — ему мало знать, что при больших n он может отсортировать состав примерно за $\frac{3}{\ln 3} \ln n$ вытягиваний. Хочется знать: а каково наименьшее число вытягиваний p для данных конкретных n и k?

Вспомним, что леммы 1, 2 и 3 были применимы не только к шагам сортировки, но и к вытягиваниям. Также для вытягиваний верно и следствие 1. Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что в начале любой сортировки вагоны нашего состава расположены в обратном порядке.

Попробуем обратить наш вопрос: а каково наибольшее число вагонов, идущих в обратном порядке, которые можно отсортировать при данных p и k?

Итак, введем еще одно обозначение.

Определение 3. Обозначим через $W(p, k)$ максимальное число вагонов n, идущих в последовательности n, $n-1$, ..., 2, 1, которые можно отсортировать за p вытягиваний, имея k стеков.

Вот некоторые очевидные равенства для $W(p, k)$:

$$W(p, 1) = 1,\ W(1, k) = 1,$$
$$W(0, k) = 1.$$

Первое равенство означает, что на одном стеке можно отсортировать только 1 вагон, второе — что за одно вытягивание можно отсортировать тоже только 1 вагон, и третье — что за 0 шагов можно отсортировать тоже только 1 вагон.

Лемма 4. *$W(2, 2) = 2$.*

Меньшим числом не обойтись, а за 2 вытягивания ясно как сделать.

Лемма 5. *Если $p < k$, то $W(p, k) = W(p, p)$.*

Действительно, если мы можем использовать p вытягиваний, то и стеков можем использовать не больше p, ведь из каждого использованного стека вагоны когда-нибудь придется вытягивать.

Будем в процессе решения нашей задачи составлять таблицу, где в p-й строке и k-м столбце стоит $W(p, k)$.

Следующее утверждение является основанием для дальнейшей индукции.

Теорема 3.

$$W(k+1,\ k+1) = 2W(k,\ k).$$

Будем доказывать это утверждение по индукции.

1°. Для $k = 1$ это верно: $2 = W(2,2) = 2W(1,1) = 2 \times 1$.

2°. Предположим, мы умеем сортировать состав, идущий в обратном порядке, из $W(k, k)$ вагонов на горке из k стеков за k вытягиваний. Назовем этот алгоритм $(A(k))$. Рассмотрим теперь на горке с $(k+1)$ стеком состав из $2 \times W(k, k)$ вагонов. Напишем номера всех вагонов в двоичной системе, начиная с нуля (напомним, что нулевой вагон самый правый). Тогда алгоритм $(A(k+1))$ состоит в следующем:

(1) Все четные вагоны в первом роспуске помещаются в $(k+1)$-й стек.

(2) У нечетных вагонов отбрасывается последний разряд (т.е. номер $2m+1$ переходит в номер m), и они распускаются в стеки с 1-го по k-й в соответствии с алгоритмом $(A(k))$.

(3) Вагоны из $(k+1)$-го стека вытягиваются, у них отбрасывается последний разряд (т.е. номер $2m$ переходит в номер m), и они распускаются в стеки с 1-го по k-й в соответствии с алгоритмом $(A(k))$.

(4) Дальше вагоны сортируются в соответствии с алгоритмом $(A(k))$.

Предыдущее рассуждение доказывает, что $W(k+1,\ k+1) \ge 2 \times W(k, k)$.

3°. Докажем теперь обратное неравенство: $W(k+1,\ k+1) \le 2 \times W(k, k)$.

Действительно, пусть на горке стоит состав из $n > 2 \times W(k, k)$ вагонов. Тогда после первого роспуска и первого вытягивания либо на горке состав из $n_1 > W(k, k)$ вагонов, либо в оставшихся k стеках находится суммарно $n_2 > W(k, k)$. В каждом из этих случаев за оставшиеся k вытягиваний не удастся отсортировать эти вагоны. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. $W(k, k) = 2^{k-1}$.

Мы уже можем заполнить большую часть нашей таблицы. Вот как теперь она выглядит (рис.7).

Число вытягиваний (p) \ Число стеков (k)	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2
3	1		4	4	4	4	4	4
4	1			8	8	8	8	8
5	1				16	16	16	16
6	1					32	32	32
7	1						64	64

Рис. 7

Попробуем применить идею предыдущего доказательства к случаю горки с двумя стеками.

Теорема 4. *$k = 2$. Пусть $F(p)$ — p-е число Фибоначчи, т.е. p-е число из последовательности $F(p)$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $F(p+1) = F(p) + F(p-1)$ и начальным данным $F(0)=1$, $F(1) = 1$, $F(2) = 2$. Тогда $W(p, 2) = F(p)$.*

Будем доказывать и это утверждение по индукции.

1°. $W(1, 2) = 1 = F(1)$, $W(2, 2) = 2 = F(2)$. Можно еще проверить, что $W(3, 2) = 3$.

Пусть теперь при всех $2 \le l < p$ за l вытягиваний можно отсортировать состав из не более $F(l)$ вагонов, идущих в обратном порядке. Докажем, что то же верно и для $l = p$.

2°. Докажем, что $W(p, 2) \le F(p)$, т.е. состав из большего числа вагонов отсортировать нельзя. Пусть это не так. Пусть $n > F(p)$. Тогда после первого роспуска в стеках оказалось $n_1 \ge n_2$ вагонов. Так как $n > F(p)$, а $F(p) = F(p-1) + F(p-2)$, то хотя бы одно из чисел n_i строго больше, чем соответствующее число $F(p-i)$, $i = 1,2$.

а) Если $n_1 > F(p-1)$, то после первого же вытягивания у нас есть «состав» из n_1 вагонов, идущих в обратном порядке, который по предположению индукции нельзя отсортировать за $p-1$ вытягивание.

б) Если $n_2 > F(p-2)$, то после второго вытягивания у нас на горке окажется неотсортированный состав из не менее n_2 вагонов, идущих в обратном порядке, который мы не можем по предположению индукции отсортировать за $p-2$ вытягивания.

Это же рассуждение позволяет рекурсивно построить алгоритм, с помощью которого за $p+1$ вытягивание можно отсортировать состав из $F(p+1)$ вагонов, идущих в обратом порядке.

3°. Пусть алгоритм $(B(p))$ сортирует состав из $F(p)$ вагонов, идущих в обратном порядке. Пусть после первого роспуска алгоритма $(B(p))$ в первом стеке окажется $F(p-1)$ вагон, а во втором — $F(p-2)$. Покрасим вагоны в первом стеке в синий цвет, а во втором — в желтый, и вернем ситуацию назад во времени. У нас на горке стоит $F(p)$ вагонов. Вставим после каждого синего вагона зеленый (т.е. зеленый вагон правее синего), и перенумеруем состав в убывающем порядке. Теперь у нас на горке стоит состав из $F(p+1) = F(p) + F(p-1)$ вагонов.

Алгоритм $(B(p+1))$ будет работать так:

(1) во время первого роспуска синие вагоны отправляются в 1-й стек, а желтые и зеленые во второй;

(2) вагоны из второго стека вытягиваются (1-е вытягивание);

(3) зеленые вагоны распускаются в первый стек, а желтые во второй.

Теперь в 1-м стеке все зеленые вагоны стоят левее синих.

Перенумеровав вагоны в 1-м и 2-м стеках, мы получим ситуацию после первого роспуска в алгоритме $(B(p))$. Дальше сортируем с помощью алгоритма $(B(p))$.

Теорема 4 доказана.

Теперь уже ничего не стоит сформулировать аналог теоремы 4 для общего случая. Как вы уже догадались, общий алгоритм является обобщением сортировки Фибоначчи.

Определение 4. Введем последовательность $u_k(k) = 2^{k-1}$, задав ее рекуррентно:

$$u_k(p) = u_k(p-1) + u_k(p-2) + \ldots + u_k(p-k),\ p > k,$$

$$u_k(1) = 1,\ \ldots,\ u_k(k) = 2^{k-1}. \qquad (*)$$

Теорема 5. $W(p, k) = u_k(p)$.

Доказательство этого утверждения естественно обобщает доказательство теоремы 4. Его мы тоже проведем по индукции.

1°. При $p \le k$ наше утверждение следует из теоремы 3, леммы 5, следствия 2 и равенства $(*)$.

Рассмотрим случай $p > k$. Пусть при всех $k < l < p$ за l вытягиваний можно отсортировать состав из не более $u_k(l)$ вагонов, идущих в обратном порядке. Докажем, что то же верно и для $l = p$.

2°. Докажем, что $W(p, k) \le u_k(p)$, т.е. состав из большего числа вагонов отсортировать нельзя. Пусть это не так. Пусть $n > u_k(p)$ и пусть после первого роспуска в стеках оказалось $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge \ldots \ge n_k$ вагонов. Сравним эту последовательность с последовательностью $u_k(p-1) \ge u_k(p-2) \ge \ldots \ge u_k(p-k)$. Так как $n > u_k(p)$, то существует номер m такой, что $n_m > u_k(p-m)$, а это означает, что среди чисел $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge \ldots \ge n_k$ не меньше m строго больших $u_k(p-m)$. Следовательно, после m вытягиваний мы будем иметь или на горке, или в одном из стеков последовательность из не менее $u_k(p-m) + 1$ вагона, номера которых идут в убывающем порядке, и которую, по индукционному предположению, мы не можем отсортировать за оставшиеся $p - m$ вытягиваний.

Так же, как и в теореме 4, строится рекурсивный алгоритм.

3°. Пусть алгоритм $(C_k(p))$, $p > k$, сортирует состав из $u_k(p)$ вагонов, идущих в обратном порядке. Пусть после первого роспуска алгоритма $(C_k(p))$ в первом стеке окажется $u_k(p-1)$ вагон, во втором — $u_k(p-2)$ и т.д., в k-м — $u_k(p-k)$. Покрасим вагоны в первых $(k-1)$ стеках в синий цвет, а в последнем — в желтый, и вернем ситуацию назад во времени. У нас на горке стоит $u_k(p)$ вагонов. Вставим после каждого синего вагона зеленый (т.е. зеленый вагон правее синего), перенумеруем состав в убывающем порядке. Теперь у нас на горке стоит состав из

$$u_k(p+1) = u_k(p) + \big(u_k(p-1) + u_k(p-2) + \ldots + u_k(p-k+1)\big)$$

вагонов.

Алгоритм $(C_k(p+1))$ работает так:

(1) во время первого роспуска синие вагоны отправляются в первые $(k-1)$ стеки в соответствии с алгоритмом $(C_k(p))$, а желтые и зеленые в последний;

(2) вагоны из последнего стека вытягиваются (1-е вытягивание);

Число вытягиваний (p) \ Число стеков (k)	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2
3	1	3	4	4	4	4	4	4
4	1	5	7	8	8	8	8	8
5	1	8	13	15	16	16	16	16
6	1	13	24	29	31	32	32	32
7	1	21	44	56	61	63	64	64
8	1	34	81	108	120	125	127	128

Рис. 8

(3) зеленые вагоны распускаются в первые $(k-1)$ стеки в соответствии с алгоритмом $\left(C_k(p)\right)$ (они помнят, перед какими вагонами они стояли), а желтые в последний.

Теперь в первых $(k-1)$ стеках все зеленые вагоны стоят левее синих.

Вспоминая номера синих и желтых вагонов при сортировке алгоритмом $\left(C_k(p)\right)$ (зеленые вагоны получают номера соответствующих синих), мы получим ситуацию после первого роспуска в алгоритме $\left(C_k(p)\right)$. Дальше сортируем с помощью алгоритма $\left(C_k(p)\right)$. Теорема 5 доказана.

Окончательный вид таблицы $W(p, k)$ показан на рисунке 8.

О некоторых рекурсивных программах и избавлении от рекурсии

Этот параграф для тех, кто умеет программировать или любит решать олимпиадные задачи по программированию. Но в нем может разобраться и любой школьник, а может и безболезненно пропустить его.

В программистском практикуме встречается задача о вычислении s-го числа Фибоначчи:

$$F(0) = 1,\ F(1) = 1,\ F(s) = F(s-1) + F(s-2),\ s > 1.$$

Вот рекурсивная программа вычисления $F(s)$:

```
functionF(s : integer) : integer;
    |{s >=0}
begin
    |if(s = 0)or(s = 1)thenbegin
    ||F :=1;
    |endelsebegin1 < s
    ||F :=F(s - 1) + F(s - 2);
    |end;
end
```

Что можно сказать о времени работы этой программы и необходимой для нее памяти?

Используемая программой память пропорциональна s. Глубина рекурсии (s) умножается на количество памяти, необходимое для одного экземпляра процедуры, т.е. на константу. А вот время растет экспоненциально, так как вычисление $F(s)$ сводится к двум вызовам $F(s-1)$ и $F(s-2)$, те — к четырем вызовам $F(s-2)$, $F(s-3)$, $F(s-3)$ и $F(s-4)$ и так далее. Поэтому время растет экспоненциально, правда, не как 2^s, а как $F(s) \simeq \lambda_1^s$, где $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ — наибольший корень уравнения $\lambda^2 = \lambda + 1$.

Хорошо известно, как избежать рекурсии (если вы случайно не знаете, как это сделать, то попробуйте, прежде чем читать дальше, придумать самостоятельно нерекурсивную программу вычисления $F(s)$).

Нужно вместо одного значения $F(s)$ вычислить одновременно пару (вектор) $(F(s), F(s-1))$, начиная с пары $(1, 1)$. Вот кусок этой программы:

```
begin
    |c := b;
    |b := a;
    |a := a + c;
end
```

Повторив это вычисление s раз, начиная со значений $a := 1$; $b := 1$;, вы получите в a значение $F(s)$. Время работы такого алгоритма порядка s, а памяти он требует порядка константы.

Упражнение 2. Допишите аккуратно вторую программу и сравните ее работу с работой первой.

Прием, который был применен, обычно называется *индуктивным расширением по Кушниренко*. Прочитать об этом можно в совершенно замечательной книге А.Х.Шеня «Программирование: Теоремы и задачи».

В нашем случае ситуация аналогична и работа рекурсивной процедуры усугубляется еще тем, что каждый рекурсивный вызов обращается не к простой функции, а к сложной программе.

Избавление от рекурсии в нашем случае заключается в обращении к алгоритму поразрядной сортировки. Только система счисления нам понадобится не 2-ичная или основанная на других геометрических прогрессиях, а основанная на последовательности Фибоначчи.

Еще раз о системах счисления

Более общий способ построения систем счисления таков. Задается некоторый «базис» системы — набор целых чисел $1 = q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$ Для того чтобы записать число n в этой системе счисления, нужно выбрать наибольшее из чисел $q_s \le n$ и разделить n на q_s с остатком: $n = a_s q_s + n_{s-1}$. Затем нужно разделить n_{s-1} на q_{s-1} с остатком: $n_{s-1} = a_{s-1}q_{s-1} + n_{s-2}$ и т.д. В результате получатся такие равенства:

$$n = a_s q_s + n_{s-1},$$
$$n_{s-1} = a_{s-1}q_{s-1} + n_{s-2},$$
$$\ldots$$
$$n_0 = a_0 q_0 \left(n_0 = a_0\right),$$

или

$$n = a_s q_s + a_{s-1}q_{s-1} + \ldots + a_0 q_0.$$

Число n записывается в виде выражения $\overline{a_s a_{s-1} \ldots a_0}$, и эта запись называется записью числа в системе счисления с базисом $1 = q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$ Числа a_i играют роль цифр и удовлетворяют неравенствам $a_i < \dfrac{q_{i+1}}{q_i}$. Заметим, что в таких системах счисления в разных разрядах могут стоять, вообще говоря, разные наборы цифр. Десятичная система обладает базисом из степеней десятки, двоичная из степеней двойки, q-ичная из степеней числа q.

Для следующего алгоритма нам понадобится система счисления с базисом 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... — последовательностью чисел Фибоначчи. Такая система так и называется *фибоначчиевой*. Вот пример записи первых девяти чисел в фибоначчиевой системе счисления:

$$0 = 0_f,\quad 1 = 1_f,\quad 2 = 10_f,\quad 3 = 100_f,$$
$$4 = 101_f,\quad 5 = 1000_f,\quad 6 = 1001_f,$$
$$7 = 1010_f,\quad 8 = 10000_f.$$

С этой системой можно познакомиться по книге Н.Н.Воробьева «Числа Фибоначчи».

Задача 12. Докажите, что в системе счисления Фибоначчи, как и в двоичной, используются всего две цифры 0 и 1 и запись любого числа в фибоначчиевой системе счисления не содержит двух рядом стоящих единиц.

Посмотрим теперь, что будет происходить на горке с двумя стеками, если мы будем сортировать состав по алгоритму двоичной сортировки, а номера вагонов запишем в фибоначчиевой системе счисления. Вагоны, которые на k-м шаге попали в стек с номером 1 (т.е. у которых в k-м разряде стоит 1), будут вытянуты в хвосте состава и после следующего роспуска все вместе отправятся в 0-й стек (ведь перед 1 обязательно стоит 01).

Возникает идея: не будем вытягивать эти вагоны из стека, а на k+1-м шаге перенумеруем стеки.

Алгоритм (F) поразрядной сортировки Фибоначчи

(1) Нумеруем вагоны в фибоначчиевой системе.

(2) На k-м шаге распускаем состав в соответствии с поразрядной сортировкой.

(3) Затем вытягиваем вагоны из 0-го стека.

(4) Перенумеровываем стеки для k + 1-го шага.

Упражнение 3. Разберитесь на примерах решения задач 6,б) и 7,б), как работает алгоритм (F).

Задача 13. Попробуйте, прежде чем читать дальше, обобщить этот алгоритм для горки с большим, чем 2, числом стеков.

Обобщение алгоритма (F) на несколько стеков

Прежде чем обобщать алгоритм сортировки Фибоначчи для горки с числом стеков большим двух, попробуем переформулировать свойство фибоначчиевой системы из задачи 12.

Запишем его так:

ф2.0) перед цифрой 0 может стоять любая цифра,

ф2.1) перед цифрой 1 может стоять только цифра 0.

Обобщим эти свойства для создания «системы счисления» для любого k, например для k = 3.

Построим «систему счисления», использующую три цифры 0, 1, 2 и удовлетворяющую следующим свойствам:

ф3.0) перед цифрой 0 может стоять любая цифра,

ф3.1) перед цифрой 1 может стоять только цифра 0,

ф3.2) перед цифрой 2 может стоять только цифра 1.

Вот набор одноразрядных чисел этой системы: 0, 1, 2.

Множество двузначных чисел этой системы: 00, 01, 10, 12, 20.

Множество трехзначных чисел включает в себя 9 чисел:

000, 001, 010, 012, 100, 101, 120, 200, 201.

Уже по набору этих «чисел» видно, что $3 < W(3, 3) = 4$; $5 < W(4, 3) = 7$; $9 < W(5, 3) = 13$. Т.е. мы получили что-то не то.

Кроме того, то, что мы сейчас определили, не является системой счисления. Ведь в любой системе счисления, если существует число 2, то должно существовать и число 02, и число 002 и т.д. А в нашей «системе» есть число 2, но нет числа 02. Наши числа — это, скорее, «слова в некотором языке с алфавитом и с некоторыми правилами». Эти правила называются *контекстно-свободной грамматикой*.

Постараемся объяснить, что это такое. Если вас заинтересует, как применяются КС-грамматики в программировании, то и об этом можно прочитать в упоминавшейся уже книге А.Х.Шеня.

Контекстно-свободные грамматики

Рассмотрим конечный алфавит, обозначим его буквы a, b, c, ... Множество слов в этом алфавите мы будем называть *языком*. Но в качестве слов мы будем рассматривать не произвольные наборы букв, а только те, которые можно получить по некоторым правилам, называемым *грамматическими*. Грамматические правила устроены так: некоторые слова или подслова можно заменять на другие.

Более формально,

Определение 5. Для того чтобы задать контекстно-свободную грамматику (КС-грамматику), нужно

(1) задать множество символов алфавита, эти символы называются *терминальными* (окончательными);

(2) задать некоторое другое множество символов, эти символы называются *нетерминальными* (промежуточными);

(3) выбрать среди нетерминалов один символ, называемый *начальным*;

(4) задать конечное число правил, имеющих вид $S \to X$, где S — некоторый нетерминальный символ, а X — слово, в которое могут входить как терминальные, так и нетерминальные символы.

Выводом в этой грамматике называется последовательность слов X_0, X_1, ..., X_n, в которой X_0 — начальный символ, а X_{k+1} получается из X_k заменой некоторого нетерминального символа S на слово X по одному из правил грамматики. Слово, составленное из терминальных символов, называется *выводимым*, если существует вывод, который этим словом кончается. Множество всех выводимых слов, состоящих из терминальных символов, называется *языком, порождаемым данной грамматикой*.

Обычно интересуются вопросом: «выводимо ли данное слово в данной грамматике?» Алгоритмы, которые для любого слова отвечают на этот вопрос, составляют существенную часть современных трансляторов, которая называется «грамматическим разбором».

Наша задача скромнее: «построить КС-грамматику, поразрядная сортировка p-буквенных слов языка которой эквивалентна алгоритму $(C_k(p+1))$».

Пример 3. Рассмотрим алфавит, состоящий из одной буквы a и правил

1) $S \to$,

2) $S \to aS$.

S — начальный символ. Обычно, если не оговорено противное, начальным символом считается символ, стоящий в левой части первого правила. Первое правило означает, что S можно заменять на пустое слово или, попросту говоря, вычеркивать из слова. Второе правило позволяет порождать новые слова, приписывая к ним букву a. Например, если нам нужно породить слово aaa, то, применяя второе правило, мы можем написать $S \to aS \to aaS \to aaaS$, а применив первое правило — $aaa \to Saaa$. Этот процесс, использующий грамматические правила языка, и есть вывод.

Упражнение 4. Сколько слов длины n (такие слова мы будем еще называть n-буквенными) в этом языке?

Пример 4. Рассмотрим язык всех слов в алфавите из двух букв a и b. Правила грамматики здесь такие:

1) $S \to$,

2) $S \to aS$,

3) $S \to bS$.

Упражнение 5. Выведите слова *aababba*.

Пример 5. Следующий язык описывает все регулярные скобочные структуры. Регулярные скобочные структуры порождаются скобками в арифметических выражениях.

Например, структура (()())() может быть представлена выражением $(7-(5+2)-(3-4))+(3-8)$, а структура ()(()) — выражением $(2+3)-((5-3)-9)$.

Вот пример всех скобочных структур, порожденных не более чем тремя парами скобок:

(), ()(), ()()(), (()), ()(()), (())(), (()()), ((())).

Число регулярных скобочных структур из n пар скобок задает последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ \ldots$$

известную, как *числа Каталана*.

Правила вывода этого языка задаются двумя правилами:

1) $S \to$,
2) $S \to S(S)$.

Вот вывод слова (()())():

$$S \to S(S) \to S(S)(S) \to S(S(S))(S) \to$$
$$\to S(S(S)(S))(S) \to (()())() .$$

Упражнение 6. Выведите слово ((()())()).

Задачи

14. Напишите программу, выводящую регулярные скобочные структуры.

15. Найдите где-нибудь определение чисел Каталана и докажите по индукции, используя правила вывода, что число скобочных структур из n пар скобок задается числами Каталана.

16. Рассмотрим язык, содержащий только конечное число слов. Напишите грамматические правила такого языка.

17. Придумайте правила вывода в языке, порожденном двумя символами 0 и 1, во всех словах которого символы 1 стоят перед символами 0. Например, 111100 и т.д.

18. Рассмотрим язык регулярных скобочных структур, содержащих две пары скобок () и [ ]. Напишите грамматические правила для этого языка.

Как мы уже говорили, основное свойство системы Фибоначчи — это отсутствие двух единиц подряд в записи любого числа. Тогда язык Фибоначчи — это язык всех слов в алфавите из двух букв 0 и 1, не содержащих подслова 11.

Вот все фибоначчиевы слова, содержащие не более четырех букв:

0, 1,
00, 01, 10,
000, 001, 010, 100, 101,
0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000,
1001, 1010.

Это хорошо знакомые вам 1-, 2-, 3- и 4-значные числа системы счисления Фибоначчи. Попробуем сформулировать грамматические правила. Но мы уже формулировали что-то похожее на них:

ф2.0) перед цифрой 0 может стоять любая цифра,

ф2.1) перед цифрой 1 может стоять только цифра 0.

Действительно, эти правила позволяли по числу длины n строить число длины $n+1$. Осталось их только записать в виде КС-грамматики. Заметим, что слова в примерах 3, 4, и 5 порождаются по-разному: в примерах 3 и 4 — слева направо, а в примере 5 — справа налево. Правила из примеров 3 и 4 называются праворекурсивными, а из примера 5 — леворекурсивными. Правила для чисел Фибоначчи «ф2.0» и «ф2.1» леворекурсивны, а алгоритмы (A), (B) и (C) — праворекурсивны! Попробуем переписать наши правила на праворекурсивные. Получаем:

f2.0) после цифры 0 может стоять любая цифра,

f2.1) после цифры 1 может стоять только цифра 0.

Чтобы построить КС-грамматику Фибоначчи (Φ), введем 2 нетерминальных символа L_0 и L_1. Первый символ будет «помнить», что перед ним стояла цифра 0, а второй — что стояла цифра 1. Тогда грамматические правила запишутся так:

(1) $L_0 \to 0L_0$,
(2) $L_0 \to 1L_1$,
(3) $L_1 \to 0L_0$.

Осталось только дописать правила исчезновения нетерминальных символов. Окончательно все правила выглядят так:

(1) $L_0 \to$,
(2) $L_1 \to$,
(3) $L_0 \to 0L_0$,
(4) $L_0 \to 1L_1$,
(5) $L_1 \to 0L_0$.

Начальный символ L_0.

Упражнения

7. Выведите слова 0100, 0101.

8. Докажите, что любое слово фибоначчиева языка может быть получено из этих грамматических правил.

Задача 19. Придумайте какие-нибудь другие грамматические правила для фибоначчиева языка.

Упражнение 9. Придумайте для языков примеров 1 и 2 леворекурсивные грамматические правила.

Попробуем теперь также сформулировать алгоритм (C) (прочитайте еще раз внимательно, как делается индукционный шаг в теореме 5). Посмотрим на зеленый вагон a, который мы вставили правее синего b. Во время второго роспуска (и всех последующих) a попадает в тот же стек, что и b. Это означает, что предпоследние символы (да и во всех следующих разрядах) у a и b совпадают. Пусть предпоследний разряд у них l. Но при первом роспуске зеленый вагон попал в стек, из которого вагоны вытягиваются. Это означает, что последний символ в «номере» зеленого вагона — ноль (договоримся, что вытягиваются вагоны из нулевого стека). Получается первое правило:

c1) «после цифры l может стоять цифра 0».

Рассмотрим теперь желтые вагоны. Ясно, что последний символ в их номере 0, а предпоследний $k-1$. Получаем следующее правило:

c2) «после цифры $k-1$ может стоять цифра 0».

И наконец, рассмотрим синий вагон. Предпоследний символ в его номере — l. А вот последний — $l+1$, ведь вытянув первый раз из 0-го стека, мы сдвинули нумерацию стеков на единицу! Последнее правило:

c3) «после цифры l может стоять цифра $l+1$».

Теперь так же, как и в случае грамматики (Φ), рассмотрим грамматику (Q_k) с k терминальными символами

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,$$

k нетерминальными символами

$$L_0,\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{k-1}$$

и правилами вывода:

$L_{i-1} \to 0L_0$,
$L_{i-1} \to iL_i \quad (1 \le i < k-1)$,
$L_{k-1} \to 0L_0$,
$L_i \to \quad (1 \le i < k-1)$,

где L_0 — главный нетерминальный символ. Ясно, что при $k=2$ грамматика (Q_2) совпадает с (Φ) и, следовательно, совпадают языки, ими порожденные. Так же, как и в случае поразрядной сортировки Фибоначчи (F), можно сформулировать

Алгоритм (K) обобщенной поразрядной сортировки Фибоначчи

(1) Породим в языке Q_k все слова длины $p-1$, где $W(p-1,k) <$ $< n \le W(p,k)$, лексикографически

их упорядочим (естественно, $0 < 1 < \ldots < k-1$) и присвоим соответствующим вагонам.

(2) Алгоритм начинается с нулевого шага.

(3) На l-м шаге распускаем состав в соответствии с символами в l-м разряде, как в поразрядной сортировке.

(4) Затем вытягиваем вагоны из 0-го стека (т.е. того стека, где собрались вагоны, у которых в l-м разряде стоит 0).

(5) Перенумеровываем стеки для $(l+1)$-го шага в соответствии с символами в $(l+1)$-м разряде, пустой стек получает номер $k-1$.

Следствие 3. *Число $(p-1)$ буквенных слов в языке, порожденном грамматикой Q_k, равно $u_k(p)$.*

Следствие 4. *Если $p \le k$, то алгоритм (K) совпадает с алгоритмом (A).*

Следствие 5. *Если $p \le k$, то число $(p-1)$-буквенных слов в языке, порожденном грамматикой Q_k, равно $u_k(p) = 2^{p-1}$.*

В одной из первых задач спрашивалось, как бы вы предложили нумеровать вагоны, если получателю неважно, в каком порядке он получит свои вагоны?

Обычно все вагоны для одного получателя занумеровывают одним номером. Такой объект, где есть несколько первых номеров, несколько вторых, ..., несколько n-х называют *мультимножеством*. Можно рассматривать перестановки мультимножества

$$S = \{\underbrace{1\ldots1}_{m_1}\underbrace{2\ldots2}_{m_2}\ldots\underbrace{s\ldots s}_{m_s}\}.$$

Задача 20. Введите для мультимножества понятие блока.

Алгоритм (K) вместе с приведенными выше результатами полностью завершает решение задачи о **минимальном числе вытягиваний при сортировке железнодорожных составов.**

Заключение

Итак, задача решена полностью. Теперь хочется остановиться и оглядеться. Давайте посмотрим, что мы получили. Основное — это таблица $W(p, k)$. Если вы в детстве считали вагоны проходящих мимо вас составов, то могли бы заметить, что редко их бывает больше 60, а число получателей редко бывает больше 20. Рассмотрев окончательную таблицу чисел $W(p, k)$ (рис.8), можно увидеть, что разумно делать горки с 3–4 стеками, но даже горка с 2 стеками не сильно увеличивает число вытягиваний. Но повысит ли наш алгоритм существенно производительность? Ведь когда состав сортируется на горке, она занята для других составов и они простаивают. А нельзя ли интенсифицировать процесс сортировки как-нибудь по-другому? Что мешает сортировать сразу несколько составов? Это принцип устройства горки — в стек можно класть с одной стороны и вынимать из него тоже с той же стороны. А не изменить ли устройство горки, сделав ее похожей на «очередь», в которую с одной стороны можно «класть» вагоны, а «вынимать» можно с другой? Но большинство составов не отсортируешь за один шаг. А не сделать ли несколько горок, соединенных последовательно, да еще и замкнуть всю эту систему в кольцо! Как, например, на рисунках 9 и 10.

Правда, такое кольцо должно занимать много места, гораздо больше, чем нынешние горки. И вот тут возникает последняя идея: а не убрать ли все это под землю! Ведь существование окончательного алгоритма означает, что составы можно сортировать без какого-либо присутствия человека. А вместо железнодорожных путей можно будет разбить прекрасные парки.

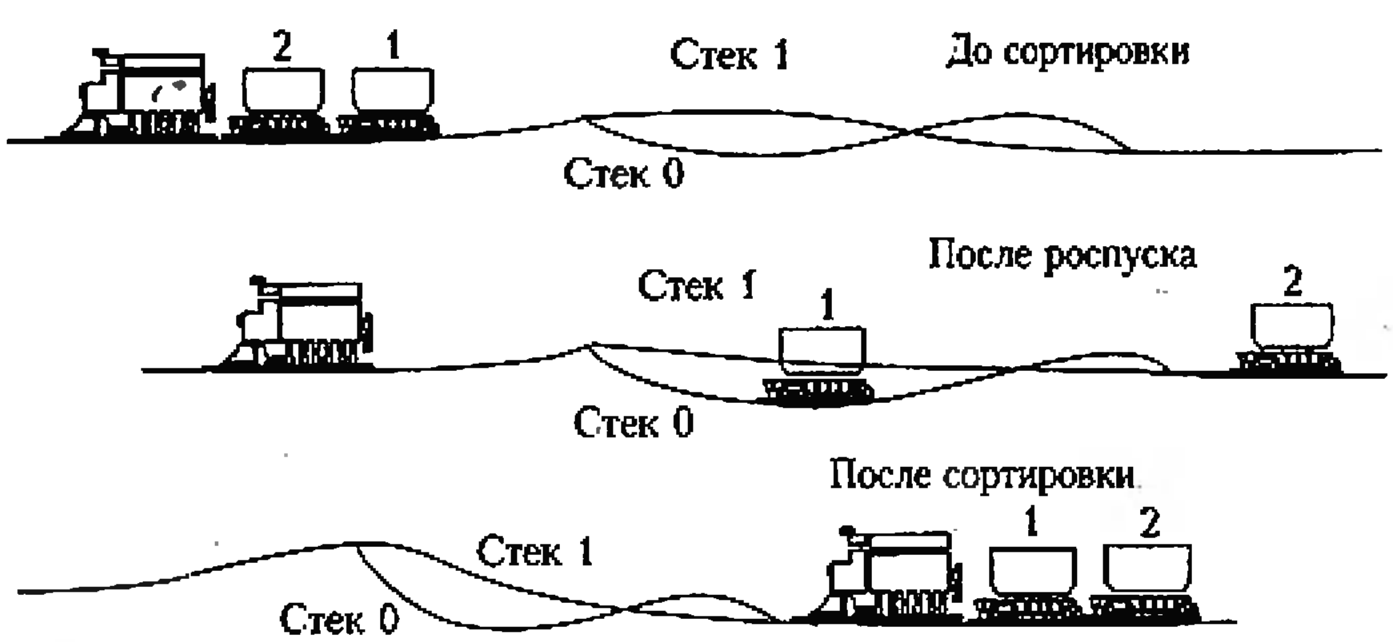


Рис. 9

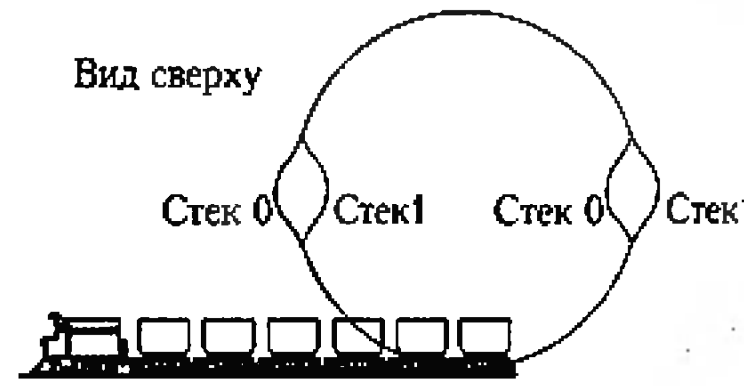


Рис. 10

Задачи для самостоятельного исследования

Задача 1*. Оцените, каков порядок числа вагонов W, прошедших через стрелку S, в алгоритмах, приведенных в этой статье.

Задача 2*. Придумайте алгоритм сортировки, который каждую индивидуальную перестановку сортирует за наименьшее число

а) шагов,

б) вытягиваний,

если в каждом стеке помещается ограниченное число вагонов $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Задача 3.** Пусть теперь разрешается распускать не весь состав и вытягивать из стеков не обязательно всю группу вагонов. Придумайте алгоритм сортировки, в котором каждая индивидуальная перестановка сортируется за наименьшее число W вагонов, прошедших через стрелку S.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3— 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1591» или «Ф1598». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1591—М1593, М1595 предлагались на весеннем туре Турнира городов, М1599 — на Московской математической олимпиаде, а М1597(б), М1598(б), М1600 — и на Турнире городов, и на Московской олимпиаде. Задачи Ф1599, Ф1600, Ф1602 предлагались на втором (очном) туре Соросовской олимпиады по физике, Ф1603 — на Московской физической олимпиаде .

Задачи М1591 — М1600, Ф1598 —Ф1607

М1591. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AK. Оказалось, что KL — биссектриса треугольника AKC. Найдите угол BAC.

С.Токарев

М1592. Можно ли представить число 1997^{1997} в виде суммы кубов нескольких идущих подряд целых чисел?

А.Егоров

М1593. Имеется набор гирек: а) 1, 2, 4, 8, 16 граммов, б) 1, 2, 4, ..., $2^9 = 512$ граммов. Разрешается класть гирьки на обе чашки весов. Какие грузы можно взвесить наибольшим числом способов?

А.Шаповалов

М1594. Известно, что $f(xf(y)) = f(x)y$, где $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

а) Докажите, что $f(xy) = f(x)f(y)$.

б) Придумайте три функции, удовлетворяющие условиям задачи.

А.Герко

М1595. В равнобедренном ($AB = BC$) треугольнике $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle OAC = 40^\circ$, $\angle OCA = 30^\circ$. Найдите $\angle BOC$.

Г.Гальперин

М1596. Про непрерывную функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[0; 5]$, известно, что $\int\limits_0^5 f(x)\,dx = 0$. Докажите, что на этом отрезке найдутся числа a, b такие, что $b - a = 3$ или $b - a = 2$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

В.Произволов

М1597. Пусть a, b, c — положительные числа и $abc = 1$. Докажите неравенства

а) $\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c} \ge 1$;

б) $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \le 1$.

Г.Гальперин

М1598. Пусть $K_n(x) = F(x)G(x)$, где $K_n(x) = 1 + x + \ldots$ $\ldots x^{n-1}$, $n > 1$, $F(x)$ и $G(x)$ — многочлены с неотрицательными коэффициентами.

а) Докажите, что все коэффициенты этих многочленов — нули и единицы.

б) Докажите, что один из многочленов $F(x)$, $G(x)$ представим в виде $(1 + x + \ldots + x^k)T(x)$, где $k > 0$, а коэффициенты $T(x)$ — нули и единицы.

М.Вялый, В.Сендеров

М1599. Из последовательности 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, ... первых цифр степеней 2 выбираются несколько цифр подряд и записываются в обратном порядке. Докажите, что эти цифры встретятся, начиная с некоторого места, подряд в последовательности первых цифр степеней 5.

А.Канель

М1600. На плоскости задан круг с диаметром 1 и несколько полос, сумма ширин которых равна 100. Докажите, что полосы можно параллельно передвинуть так, чтобы они покрыли круг.

М.Смуров

Ф1598. Вдали от всех тел, в глубинах космоса движется летающая тарелка. Скорость ее в некоторый момент равна v_0. Пилот хочет произвести маневр, в результате которого вектор скорости повернется на 90° и составит по величине v_0, как и до начала маневра. Ускорение тарелки при маневре не должно превышать заданной величины a. Найдите минимальное время маневра. Чему будет равно минимальное смещение тарелки за это время?

З.Рафаилов

Ф1599. Два стержня длиной L каждый соединены шарнирно (рис.1). Свободный конец одного из стержней шарнирно закреплен, а свободный конец другого стержня начинают двигать с постоянной по величине и направлению скоростью $\vec{v}_0$, причем в начальный момент вектор скорости параллелен биссектрисе угла

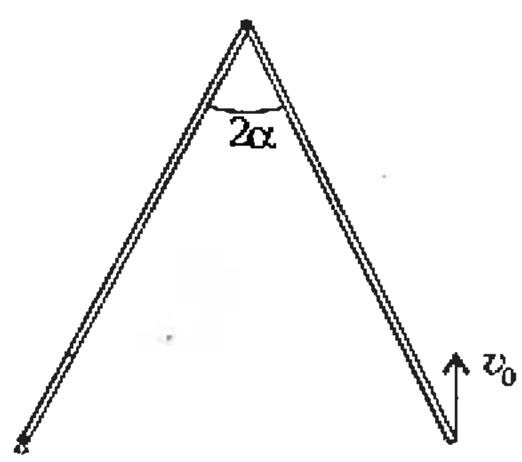


Рис.1

2α, составленного стержнями в этот момент. Найдите величину и направление вектора ускорения шарнира, соединяющего стержни, через очень маленький отрезок времени после начала движения.

А.Зильберман

Ф1600. На гладкой горизонтальной поверхности стола стоит обруч радиусом R и массой M. Обруч пытались перепилить, однако дело не было доведено до конца. Масса удаленных опилок составила m, размер поврежденной области очень мал по сравнению с радиусом обруча. В начальный момент поврежденное место находится точно внизу, и от совсем малого толчка обруч выходит из состояния равновесия. Найдите максимальное смещение центра обруча и его максимальную угловую скорость. Найдите также максимальную скорость центра обруча. Считайте, что обруч все время остается в вертикальной плоскости.

Р.Александров

Ф1601. Небольшое тело прикреплено к невесомому жесткому обручу радиусом R. Обруч удерживают в положении, показанном на рисунке 2. На каком

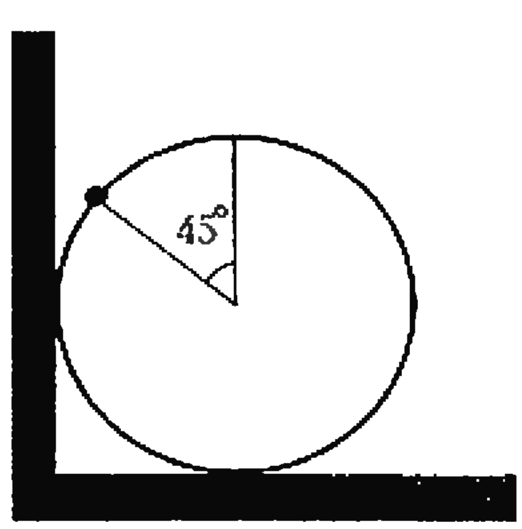


Рис.2

расстоянии от вертикальной стенки тело коснется горизонтальной плоскости после освобождения обруча? Трением пренебречь.

М.Бакунов, С.Бирагов

Ф1602. Сосуд объемом 5 литров с жесткими стеклянными стенками соединен короткой жесткой трубкой с горлышком литровой пластиковой бутылки из-под газированной воды — ее тонкие стенки практически нерастяжимые, но довольно мягкие. В системе из двух сосудов находится неизменное количество воздуха. Воздух понемногу охлаждают, измеряя его давление. Вплоть до температуры +50 °С давление в системе уменьшалось, а начиная с этой температуры перестало уменьшаться. При какой температуре давление снова начнет уменьшатся? Атмосферное давление остается постоянным.

С.Варламов

Ф1603. В калориметре в воде плавает кусок льда. Опускаем в калориметр нагреватель постоянной мощности 50 Вт и начинаем каждую минуту измерять температуру воды. За первую минуту температура увеличилась на 2 градуса, а к концу четвертой — еще на 5 градусов. Сколько было в калориметре воды и сколько льда?

А.Теплов

Ф1604. Частица с зарядом q влетает в область взаимно перпендикулярных однородных электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$. В этой области на частицу действует также сила вязкого трения $\vec{F} = -k\vec{v}$ (k — заданная положительная величина, $\vec{v}$ — мгновенная скорость частицы). Найдите скорость установившегося движения частицы.

М.Бакунов, С.Бирагов

Ф1605. Заряженный конденсатор емкостью C подключают к последовательно соединенным батарейке напряжением U_0 и резистору сопротивлением R. С момента подключения в резисторе выделилось количество теплоты Q. Найдите по этим данным начальное напряжение конденсатора.

А.Теплов

Ф1606. Проводящая квадратная рамка, сделанная из тонкой проволоки с очень высоким удельным сопротивлением, симметрично охватывает длинный соленоид радиусом R (рис.3). Однородное магнитное поле внутри соленоида возрастает со временем по линейному закону $B = \alpha t$. Пренебрегая магнитным полем вне соленоида и собственным магнитным полем рамки,

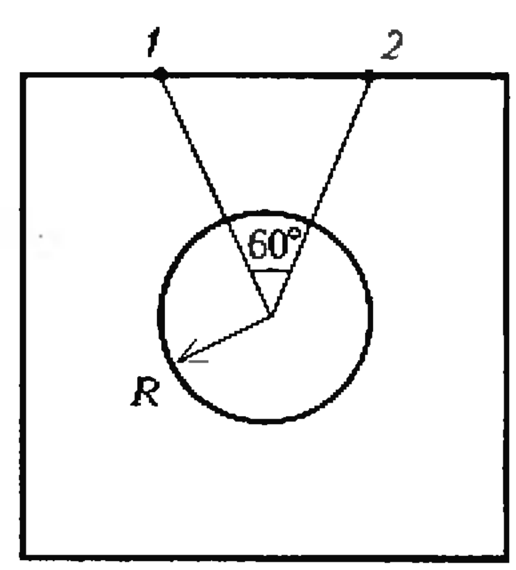


Рис.3

найдите показания вольтметра, подключенного проводами к симметричным точкам *1* и *2*. Что покажет вольтметр, если его присоединить к точке *1* и ближайшему к ней углу рамки?

М.Бакунов, С.Бирагов

Ф1607. Нить накала осветительной лампочки мощностью 60 Вт сделана из вольфрама. Оцените, при какой массе нити накала минимальная температура отличается от средней не более чем на 100 К.

А.Светлов

Решения задач М1571 — М1575, Ф1583 — Ф1592

М1571. *Дана прямоугольная доска ABCD со сторонами $AB = 20$, $BC = 12$, разбитая на 20×12 единичных квадратов. Пусть r — данное положительное целое число. За один ход монету можно передвинуть из одного единичного квадрата в другой в том и только том случае, когда расстояние между их центрами равно $\sqrt{r}$. Требуется найти последовательность ходов, переводящую монету из единичного квадрата с вершиной A в единичный квадрат с вершиной B.*
а) Докажите, что это невозможно, если r делится на 2 или на 3.
б) Докажите, что это можно сделать, если $r = 73$.
в) Можно ли это сделать при $r = 97$?

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A, направив оси Ax и Ay по сторонам AB и AD данного прямоугольника, с единицей длины, равной стороне единичного квадрата. Наша задача — найти путь из точки (0; 0) в точку (19; 0) такой, что для каждого хода $(x; y) \to (x + a,\ y + b)$ выполняется равенство $a^2 + b^2 = r^2$.

а) Если r четно, то для каждого целого решения уравнения $a^2 + b^2 = r^2$ сумма $a + b$ тоже четна. Для каждой целой точки $(x;\ y)$, в которую можно попасть из (0; 0), $x + y$ четно. Следовательно, попасть в точку (19; 0) невозможно.

Если r делится на три, то для каждого целого решения $(a;\ b)$ уравнения $a^2 + b^2 = r^2$ и a, и b должны делиться на 3. Поэтому попасть в точку (19; 0) невозможно.

б) Один из примеров движения монеты из (0; 0) в (19; 0) при $r = 73 = 8^2 + 3^2$ такой:

$$(0;\ 0)\to(3;\ 8)\to(11;\ 5)\to(19;\ 2)\to(16;\ 10)\to$$
$$\to(8;\ 7)\to(0;\ 4)\to(8;\ 1)\to(11;\ 9)\to(3;\ 6)\to(11;\ 3)\to$$
$$\to(19;\ 0).$$

в) Пусть $R = \{(i;j):\ 0\le i\le 19,\ 0\le j\le 11\}$, $P = \{(i;i):\ 0\le i\le 19,\ 4\le j\le 7\}$, Q — их разность: $Q = R\setminus P$. Так как число 97 представляется в виде суммы квадратов единственным образом: $9^2 + 4^2$, то каждый ход состоит из одного из векторов $(\pm 9;\pm 4)$, $(\pm 4;\pm 9)$. Легко проверить, что ход типа $(\pm 9;\pm 4)$ из точки множества P всегда приводит нас в точку из Q и наоборот, тогда как ход типа $(\pm 4;\pm 9)$ не выводит нас из множества Q (заметим, что за один шаг нашими ходами нельзя попасть из точки из P в точку из P). Каждый ход типа $(\pm 9;\pm 4)$ изменяет четность x-координаты, поэтому, чтобы попасть из (0; 0) в (19; 0), требуется нечетное число таких ходов. Каждый такой ход приводит нас от точки из P в точку из Q и наоборот. Значит, после нечетного числа ходов из точки $(0;\ 0)\in Q$ попадем в точку из P, но $(19;\ 0)\in Q$. Поэтому требуемое невозможно.

Д.Терешин

М1572. *Известно, что внутри треугольника ABC нашлась точка P такая, что $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Пусть D и E — центры окружностей, вписанных в треугольники APB и APC соответственно. Докажите, что а) прямые AP, BD и CE пересекаются в одной точке; б) прямые AP, BE и CD также пересекаются в одной точке.*

а) Пусть основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC, CA и AB — точки X, Y и Z соответственно. Тогда из рассмотрения вписанных четырехугольников $AZPY$, $BXPZ$ и $CYPX$ получается, что $YZ = PA\cdot\sin\angle A$ и $\angle YXZ = \angle BPC - \angle A$. Аналогично, справедливы равенства $XY = CP\cdot\sin\angle C$, $XZ = BP\cdot\sin\angle B$, $\angle XZY = \angle APB - \angle C$, $\angle XYZ = \angle APC - \angle B$. Пусть BD и CE пересекают AP в точках Q и R соответственно. По свойству биссектрисы $AQ/QP = AB/BP$ и $AR/RC = AC/CP$, поэтому если $AB/BP = AC/CP$, то точки R и Q совпадают. Итак, докажем, что $AB/BP = AC/CP$. Мы знаем, что $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$, следовательно, $\angle XZY = \angle XYZ$, т.е. $XY = XZ$. Поэтому $CP\cdot\sin\angle C = BP\cdot\sin\angle B$, значит, $AB\cdot CP = AC\cdot BP$, откуда и следует требуемое.

б) Докажем, что AP, BE и CD пересекаются в одной точке. Действительно, рассмотрим (невыпуклый) шестиугольник $QECPBD$, где Q — точка пересечения AP, BD и CE. Указанные прямые являются его главными диагоналями, а они, как известно (это несложно проверить с помощью теоремы синусов), пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$QE\cdot CP\cdot BD = EC\cdot PB\cdot DQ.$$

Последнее равенство вытекает из того, что PE и PD — биссектрисы углов QPC и QPB (достаточно перемножить равенства $PQ/CP = QE/EC$ и $PB/PQ = BD/DQ$).

Замечание. Задача имеет и много других решений. Основные идеи четырех из них: окружности Аполлония, теорема Бретшнайдера, переход к изогонально сопряженной точке, построения вспомогательных подобных треугольников.

Д.Терешин

М1573. *Положительные целые числа x и y таковы, что числа $5x + 16y$ и $6x - 15y$ оба являются квадратами положительных целых чисел. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать минимум из этих двух квадратов.*

В такой формулировке задача почти очевидна. Ответ: минимум равен 9 и достигается при $x = 4$, $y = 1$ (ясно, что первое число всегда больше 9, а второе делится на 3).

Читатели, которые прислали нам письма с недоуменными вопросами: неужели такая задача предлагалась на международной олимпиаде, — разумеется, правы. А виноват во всем компьютер: мы давно замечали, что он при переносе текста из одной программы в другую почему-то часто пропускает цифру 1, но на этот раз оказались выброшенными сразу две единицы! На олимпиаде предлагалась задача, в которой линейные выражения равнялись $15x + 16y$ и $16x - 15y$. Ответ в ней: $(13\cdot 37)^2$, и наиболее короткое решение использует малую теорему Ферма (если p — простое число, то $a^{p-1} - 1$ делится на p при любом целом a, не кратном p): достаточно рассмотреть сумму квадратов величин $u^2 = 15x + 16y$ и $v^2 = 16x - 15y$ — она равна

$$u^4 + v^4 = 13\cdot 37\left(x^2 + y^2\right),$$

а $u^4 + v^4$ делится на простое число p вида $4k + 1$, где k — нечетно (в частности, $p = 13$ и $p = 37$), только при u и v, делящихся на p.

В.Сендеров

М1574. *В выпуклом шестиугольнике ABCDEF $AB \parallel ED$, $BC \parallel FE$ и $CD \parallel AF$. Пусть R_A, R_C и R_E — радиусы окружностей, описанных около треугольников FAB, BCD и DEF соответственно, а p — полупериметр шестиугольника. Докажите, что*

$$R_A + R_C + R_E \ge p.$$

Первое решение. Пусть длины сторон AB, CB, CD, DE, EF и FA равны a, b, c, d, e и f соответственно. Построим $AP \perp BC$, $AS \perp EF$, $DQ \perp BC$, $DR \perp EF$. Тогда $PQRS$ — прямоугольник и $BF \ge PS = QR$. Следовательно, $2BF \ge PS + QR$ и тогда $2BF \ge$ $\ge (a\sin B + f\sin C) + (c\sin C + d\sin B)$ (мы воспользовались тем, что $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ и $\angle C = \angle F$). Аналогично,

$$2DB \ge (c\sin A + b\sin B) + (e\sin B + f\sin A),$$

$$2FD \ge (e\sin C + d\sin A) + (a\sin A + b\sin C).$$

Запишем выражения для R_A, R_C и R_E:

$$R_A = \frac{BF}{2\sin A},\ R_C = \frac{DB}{2\sin C} \text{ и } R_E = \frac{FD}{2\sin B}.$$

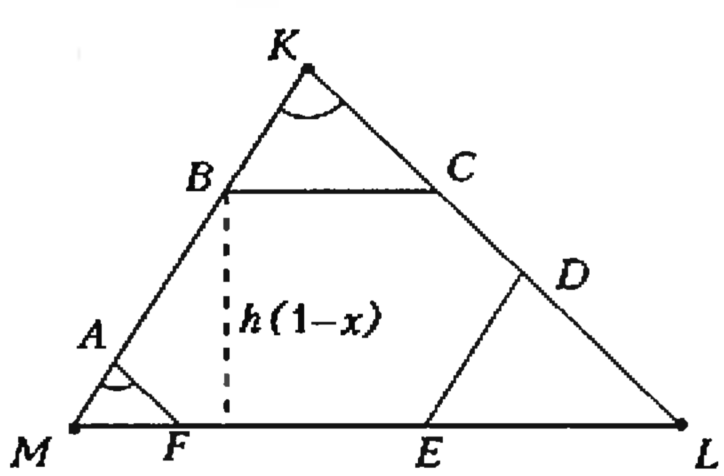
Таким образом,

$$4(R_A + R_C + R_E) \ge$$
$$\ge a\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\right) + b\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) + \ldots \ge 2(a + b + \ldots) = 4p,$$

следовательно, $R_A + R_C + R_E \ge p$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\angle A = \angle B = \angle C$ и $BF \perp BC$, т.е. в случае правильного шестиугольника.

Н.Седракян

Второе решение. Рассматриваемый шестиугольник $ABCDEF$ можно получить из некоего треугольника KLM, проведя прямые, параллельные сторонам этого треугольника (см. рисунок).



Пусть $KL = m$, $LM = k$, $MK = l$, $\angle LKM = \delta$, высота к стороне LM равна h, коэффициенты подобия (гомотетии) треугольников KCB, DLE и AFM по отношению к треугольнику KLM равны соответственно x, y, z. Понятно, что

$$x + y \le 1,\ y + z \le 1,\ z + x \le 1 \qquad (*)$$

(мы допускаем ниже и случаи равенства). Если R — радиус окружности, описанной около треугольника ABF,

$$R = \frac{BF}{2\sin\delta} \ge \frac{h(1-x)}{2\sin\delta} = \frac{S_{KLM}(1-x)}{2k\sin\delta} = \frac{lm}{k}(1-x).$$

Оценивая аналогично другие радиусы и выражая стороны шестиугольника через k, l, m, x, y, z, получим, что нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{lm}{k}(1-x) + \frac{mk}{l}(1-y) + \frac{kl}{m}(1-z) \ge$$
$$\ge k(1 + x - y - z) + l(1 + z - x - y) + m(1 + y - z - x).\ (**)$$

Это неравенство линейно относительно x, y, z. Но переменные x, y, z неотрицательны и удовлетворяют еще условию $(*)$ (на самом деле они больше нуля и неравенства $(*)$ строгие, но мы несколько расширяем область их изменения). Областью изменения их является многогранник в координатном пространстве $(x; y; z)$ с вершинами $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(1/2; 1/2; 1/2)$. Достаточно проверить, что неравенство $(**)$ выполняется в этих вершинах. Например, при $x = y = z = 1/2$ и при $x = y = z = 0$ получаем неравенство

$$\frac{kl}{m} + \frac{lm}{k} + \frac{mk}{l} \ge k + l + m;$$

оно легко доказывается сложением очевидных неравенств

$$\frac{kl}{m} + \frac{mk}{l} \ge 2k,\ \frac{kl}{m} + \frac{lm}{k} \ge 2l,\ \frac{lm}{k} + \frac{mk}{l} \ge 2m.$$

Для остальных трех вершин неравенство $(**)$ очевидно.

И.Шарыгин

Замечание. Для центрально-симметричных шестиугольников эта задача эквивалентна замечательному неравенству Эрдеша–Морделла: для любой точки M внутри треугольника сумма растояний от M до вершин по крайней мере вдвое больше суммы расстояний от M до сторон (опустите перпендикуляры MB, MD, MF на стороны и постройте параллелограммы $BMFA$, $DMBC$, $FMDE$; радиусы описанных окружностей треугольников BMF, DMB, FMD равны R_A, R_C, R_E в условии и равны расстояниям от точки M до вершин треугольника).

М1575. *Пусть n, p, q — положительные целые числа такие, что $n > p + q$, а x_0, x_1, …, x_n — целые числа такие, что*
(i) $x_0 = x_n = 0$;
(ii) для каждого целого i $(1 \le i \le n)$ выполняется одно из равенств $x_i - x_{i-1} = p$ или $x_i - x_{i-1} = -q$. Докажите, что существует пара индексов $(i; j)$ ($i < j$ и $(i; j) \ne (0; n)$) такая, что $x_i = x_j$.

Заметим сначала, что без ограничения общности можно считать числа p и q взаимно простыми, так как если p и q имеют общий делитель $d > 1$, то утверждение задачи не изменится, если разделить p, q и все x_i на d. Пусть есть k индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что $x_i - x_{i-1} = p$. Тогда число индексов i таких, что $x_i - x_{i-1} = -q$, равно $n - k$. Так как $x_n = x_0 = 0$, то $kp = (n-k)q$, что в силу взаимной простоты p и q влечет $k = aq$, $n - k = ap$ для некоторого натурального a. Следовательно, $n = a(p + q)$, а раз $n > p + q$, то $a > 1$. Аналогично можно доказать, что x_i может равняться x_{i+m} лишь при m, кратном $p + q$. Поэтому естественно рассмотреть приращения $x_{i+t} - x_i$ за $t = p + q$ шагов. Пусть $y_i = x_{i+p+q} - x_i$ для $i \in \{0, 1, \ldots, n - p - q\}$. Так как $n > p + q$, то таких y_i по меньшей мере 2. Заметим, что $y_0 + y_{p+q} + y_{2p+2q} + \ldots + y_{n-p-q} = 0$, следовательно, y_i не могут быть все одного знака. Мы покажем, что по крайней мере одно из чисел y_i равно 0, откуда и вытекает утверждение задачи.

Для каждого i обозначим через S_i множество индексов $\{i+1, i+2, \ldots, i+p+q\}$. Пусть r — число таких $j \in S_i$, для которых $x_j - x_{j-1} = p$. Тогда число таких $j \in S_i$, для которых $x_j - x_{j-1} = -q$, равно $p+q-r$. Суммируя эти равенства по всем $j \in S_i$, получаем:

$$y_i = rp - (p+q-r)q = (p+q)(r-q),$$

т.е. y_i делится на $t = p+q$ при всех i. Теперь рассмотрим выражение $y_{i+1} - y_i$:

$$y_{i+1} - y_i = \left(x_{i+p+q+1} - x_{i+1}\right) - \left(x_{i+p+q} - x_i\right) =$$

$$= \left(x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}\right) - \left(x_{i+1} - x_i\right).$$

Каждая скобка в последнем равенстве есть p или $-q$, поэтому $y_{i+1} - y_i$ равно 0 или $\pm(p+q)$. Итак, в последовательности $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-p-q-1}, y_{n-p-q}$ есть два числа разных знаков (если предположить, что все y_i отличны от нуля). Но каждое y_i делится на $p+q$, а разность между соседними числами есть 0 или $\pm(p+q)$, следовательно, есть y_i, равное нулю.

С.Рукшин

Ф1583. *Автомобиль массой $M = 1000$ кг разгоняется по окружности радиусом $R = 100$ м из состояния покоя. Какая необходима мощность двигателя для максимально быстрого разгона? Коэффициент трения колес о землю $\mu = 0,7$, все колеса автомобиля ведущие.*

Мощность двигателя ограничивает «темп» разгона автомобиля. В самом начале разгона сила трения (именно она и разгоняет автомобиль) направлена вдоль вектора скорости, но мощность получается небольшой потому, что скорость еще мала по величине. В конце разгона, когда автомобиль почти достиг предельной скорости v_0, которая определяется из соотношения $v_0^2/R = \mu g$, сила трения практически перпендикулярна вектору скорости и мощность опять получается небольшой. Ясно, что нужно искать некоторое промежуточное состояние, в котором произведение скорости на касательную (тангенциальную) составляющую силы трения достигнет максимума.

Если скорость автомобиля в некоторый момент равна v, то сила трения μg имеет центростремительную (нормальную) составляющую Mv^2/R, при этом ее касательная составляющая равна $f = \sqrt{(\mu Mg)^2 - \left(Mv^2/R\right)^2}$, а требуемая мощность определяется произведением fv. Максимум этой величины найдем обычным способом, только вначале сделаем упрощения — возведем fv в квадрат (максимум останется там же, но арифметика получится попроще) и введем обозначение $x = v^2/R$. Теперь нам нужно исследовать функцию

$$A = Rx\left((\mu Mg)^2 - (Mx)^2\right).$$

Ее максимум находим при помощи производной:

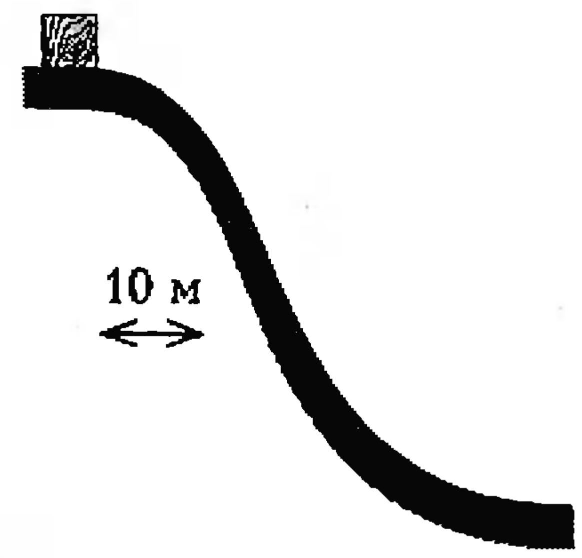
$$x_0 = \frac{\mu g}{\sqrt{3}}.$$

Тогда необходимая мощность будет равна

$$N = \sqrt{A_0} = \mu Mg\sqrt{\frac{2\mu gR}{3\sqrt{3}}} \approx 115 \text{ кВт} \approx 150 \text{ л.с.}$$

А.Повторов

Ф1584. *На рисунке показан профиль гладкой горки, по которой скользит без начальной скорости тело*



маленького размера. Найдите максимальную величину ускорения тела. Найдите также максимальную перегрузку, действующую на тело при таком движении (перегрузка показывает, во сколько раз вес тела превышает действующую на него силу тяжести).

Чертеж довольно мелкий, и получить хорошую точность очень трудно — мы и надеяться не будем, а решим задачу очень приближенно. При движении тела максимальная скорость получится внизу. По чертежу определим высоту горки: $h \approx 50$ м и найдем эту скорость из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{2gh} \approx 32 \text{ м/с}.$$

Опять же из чертежа определим радиус кривизны горки в нижней части: у нас получилось $R \approx 30$ м и вычислим центростремительное ускорение тела в нижней части горки:

$$a = \frac{v^2}{R} \approx 33 \text{ м/с}^2.$$

Это значение существенно превышает величину ускорения свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$, и можно считать, что максимальная перегрузка и максимальное ускорение достигаются практически в этой нижней точке. Таким образом, максимальное ускорение

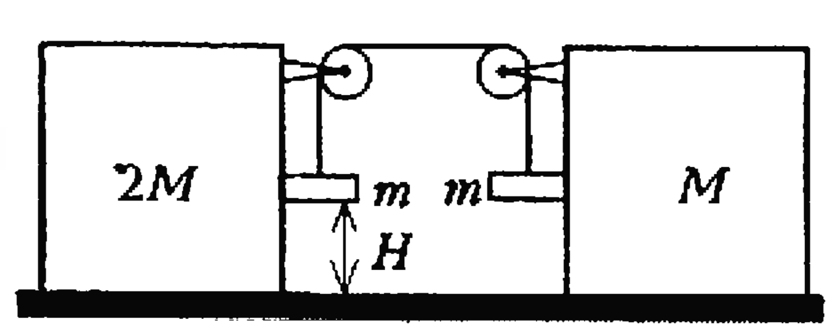
$$a_{max} = a \approx 33 \text{ м/с}^2,$$

а максимальную перегрузку найдем из уравнения второго закона Ньютона:

$$N - mg = ma_{max}, \quad N = m\left(g + a_{max}\right), \quad \frac{N}{mg} \approx 4{,}3.$$

Р.Александров

Ф1585. *В системе, изображенной на рисунке, трение отсутствует. В начальный момент все тела удерживают, при этом свисающие концы нитей вертикаль-*



ны, а висящие на них грузы касаются боковых поверхностей кубов. Массы кубов M и 2M, каждый из грузов имеет массу m. Систему отпускают. Найдите скорость большого куба в тот момент, когда касающийся его груз ударится о стол. Начальная высота грузов относительно горизонтальной поверхности стола H.

Пусть V — скорость куба массой $2M$, движущегося вправо. Тогда скорость v куба массой M, движущегося навстречу первому (в горизонтальном движении принимают участие и грузы), найдем из закона сохранения импульса (обозначив $m/M = \gamma$):

$$(2M+m)V = (M+m)v,$$

$$v = V\frac{2M+m}{M+m} = V\frac{2+\gamma}{1+\gamma}.$$

Горизонтальный участок нити укорачивается со скоростью $V + v$, грузы по вертикали имеют одинаковые ускорения (на грузы действуют одинаковые силы), значит, скорости их одинаковы и стола они достигнут одновременно. Запишем теперь закон сохранения энергии:

$$\frac{(2M+m)V^2}{2} + \frac{m((V+v)/2)^2}{2} + \frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{m((V+v)/2)^2}{2} = 2mgH,$$

подставим сюда вычисленное раньше значение v и после долгих и нудных вычислений получим

$$V = \sqrt{\frac{8gH\gamma(1+\gamma)^2}{(3+2\gamma)(4\gamma^2+9\gamma+4)}},$$

где $\gamma = \dfrac{m}{M}$.

З.Рафаилов

Ф1586. *В кубическом сосуде объемом V = 1 л находится некоторое количество гелия при температуре T = 300 К. Оцените давление газа, при котором число ударов молекул друг о друга за некоторый отрезок времени равно числу ударов молекул о стенки сосуда. Сильно усложнилась бы задача, если бы вместо гелия в сосуде был водяной пар?*

Для оценки числа ударов молекул друг о друга запишем выражение для длины свободного пробега молекул — среднего расстояния, пробегаемого молекулой между последовательными соударениями, — выразив его через диаметр молекул d и их концентрацию n: $\lambda = 1/(\pi d^2 n)$. Время пролета этого расстояния со средней скоростью v равно λ/v, а за большой интервал времени τ молекула совершит $v\tau/\lambda$ ударов о другие молекулы. Если число молекул в сосуде N, то для нахождения полного числа ударов молекул друг о друга нужно умножить число ударов одной молекулы о другие на число молекул, деленное на два, — чтобы не учитывать удары дважды. Итак, полное число ударов молекул друг о друга за выбранный интервал времени составляет $0{,}5Nv\tau/\lambda = 0{,}5Nv\tau\pi d^2 n$.

Число ударов молекул о стенки сосуда можно найти обычным путем — это часть стандартного рассуждения при расчете давления газа на стенку сосуда. Обозначив составляющую скорости молекул вдоль одной выбранной оси v_x и длину ребра стенки сосуда a, получим, что число ударов о все шесть стенок куба за большой интервал времени τ равно $6\tau v_x N/(2a)$.

Приравнивая полученные выражения для чисел ударов и учитывая, что значения составляющей скорости v_x можно грубо оценить по энергии молекулы: $v_x = v/\sqrt{3}$, а диаметр молекулы гелия $d = 2\cdot10^{-10}$ м (это значение мы взяли из справочника), получим выражение для концентрации молекул:

$$n = \frac{6}{\sqrt{3}\pi d^2 a} \approx 3\cdot10^{20}\ \text{м}^{-3}.$$

Такая концентрация соответствует величине давления в сосуде

$$p = nkT \approx 1{,}2\ \text{Па}.$$

Это очень маленькое давление. В обычных условиях число ударов молекул друг о друга во много раз превышает число ударов молекул о стенки сосуда.

Что изменилось бы в ответе, если бы вместо гелия в сосуде был водяной пар? Для получившихся в результате решения очень малых концентраций газа «в буквах» практически ничего не должно измениться, немного изменится численный ответ — большее значение диаметра молекулы воды (примерно $3\cdot10^{-10}$ м) уменьшит искомое давление примерно в 2 раза. При обычных давлениях число ударов молекул воды друг о друга может оказаться существенно больше, чем дает наш расчет, который не учитывает значительных сил притяжения между полярными молекулами водяного пара.

М.Учителев

Ф1587. *В длинной горизонтальной гладкой пустой трубе находятся два поршня, которые могут скользить без трения вдоль трубы. Один из поршней имеет массу M = 1 кг, другой — в два раза тяжелее. В начальный момент между поршнями находится моль кислорода при температуре T_0 = 300 К, а тяжелый поршень движется со скоростью v_0 = 1 м/с по направлению к неподвижному в этот момент легкому поршню. Чему равна максимальная температура газа в этом процессе? Найдите также скорости поршней через большой отрезок времени. Теплоемкость стенок трубы и поршней считать малой, теплопроводностью пренебречь.*

Температура газа увеличивается до тех пор, пока газ сжимается, т.е. до того момента, когда скорости поршней сравняются:

$$u_1 = u_2 = \frac{2Mv_0}{3M} = \frac{2}{3}v_0.$$

При этом внутренняя энергия газа возрастет на величину

$$\frac{2Mv_0^2}{2} - \frac{3M(2v_0/3)^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{3},$$

так что для кислорода (учитывая, что это двухатомный газ) баланс энергий можно записать в виде

$$\frac{5}{2}RT_0 + \frac{Mv_0^2}{3} = \frac{5}{2}RT_1.$$

Отсюда находим максимальную температуру газа:

$$T_1 = T_0 + \frac{2}{15}\frac{Mv_0^2}{R} = 300 \text{ К} + 0{,}016 \text{ К}.$$

Видно, что изменение температуры в данном процессе очень незначительно.

Легкий поршень все время разгоняется – его скорость будет максимальной к тому моменту, когда поршни окажутся на большом расстоянии друг от друга и давление газа упадет до совсем малого значения. Это означает, что температура газа окажется малой, его внутреннюю энергию можно будет считать нулевой, а кинетическая энергия системы поршней возрастет на величину начальной внутренней энергии газа и составит (газ двухатомный)

$$\frac{Mv_1^2}{2} + \frac{2Mv_2^2}{2} = \frac{2Mv_0^2}{2} + \frac{5}{2}RT_0.$$

Запишем теперь закон сохранения импульса (пренебрегая импульсом малой порции газа):

$$2Mv_0 = Mv_1 + 2Mv_2.$$

Для искомого значения скорости легкого поршня получаем квадратное уравнение

$$3v_1^2 - 4v_0v_1 - \frac{10RT_0}{M} = 0.$$

Поскольку скорость центра масс системы равна $2v_0/3$, скорость легкого поршня должна быть больше этой величины, т.е.

$$v_1 = \frac{2}{3}v_0 + \frac{2}{3}\sqrt{v_0^2 + \frac{15RT}{2M}} \approx 92 \text{ м/с}.$$

Скорость тяжелого поршня будет равна, соответственно,

$$v_2 = v_0 - \frac{v_1}{2} \approx -45 \text{ м/с}.$$

А.Зильберман

Ф1588. *Плоский конденсатор состоит из двух пластин площадью S каждая, находящихся на маленьком расстоянии d друг от друга. Оцените работу, которую нужно совершить для того, чтобы зарядить пластины одинаковыми зарядами Q. Считайте, что заряды распределяются по пластинам равномерно.*

Разделим заданный в условии задачи процесс на две простые (относительно!) части – вначале очень далеко друг от друга зарядим как надо эти пластины, а затем сблизим их на указанное расстояние, преодолевая силы отталкивания.

Итак, сначала заряжаем пластины. Тут нам поможет такой прием – будем заряжать не две, а четыре пластины (потом мы это учтем), которые будут вначале двумя обычными плоскими конденсаторами с нужной нам площадью пластин. Обозначим расстояние между парами пластин буквой d (не обязательно это расстояние такое же, как задано в условии, но оно должно быть во много раз меньше размеров пластин). Пусть заряженные конденсаторы в сумме имеют энергию Q^2/C.

Теперь начнем растаскивать пластины одного конденсатора – силы взаимодействия вначале постоянны, а затем начинают убывать. Точный расчет очень сложен, да он нам и не нужен – нам нужна разумная оценка. Будем считать, что на первом участке сила постоянна, на втором она спадает по закону обратных квадратов (закон Кулона для точечных зарядов), а место, где один закон сменяется другим, определим из условия равенства сил, посчитанных по двум соответствующим формулам:

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \gg d.$$

Полная работа составляет

$$A = \frac{Q^2}{C} + 2\left(\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}x_1 + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_1}\right) = \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 S} + \frac{2Q^2}{\varepsilon_0\sqrt{2\pi S}} \approx \frac{2Q^2}{\varepsilon_0\sqrt{2\pi S}}.$$

При расчете мы учли, что $d \ll \sqrt{S}$, и считали, что пластины растаскивали с нулевого расстояния.

В результате у нас есть четыре заряженные пластины, находящиеся далеко друг от друга, и можно считать, что половина затраченной энергии была израсходована на нужные нам две пластины. Осталось посчитать работу по их сближению. Однако похожую проблему мы только что решили – растаскивать разноименные заряды и сближать одноименные «стоит» одинаковой работы. Таким образом, к половине прежней работы нужно прибавить новую – это и будет искомая работа:

$$A_{\text{общ}} = \frac{Q^2}{\varepsilon_0\sqrt{2\pi S}} + \left(\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}x_1 + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_1}\right) = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0\sqrt{2\pi S}}.$$

Видно, что ответ не зависит от расстояния между пластинами – лишь бы оно было малым.

А.Зильберман

Ф1589. *Длинная цепочка резисторов включает звенья двух типов 2R – R и R – 2R, соединенных попеременно, как показано на рисунке 1. Найдите сопротивление между точками A и B при большом числе звеньев в цепи.*

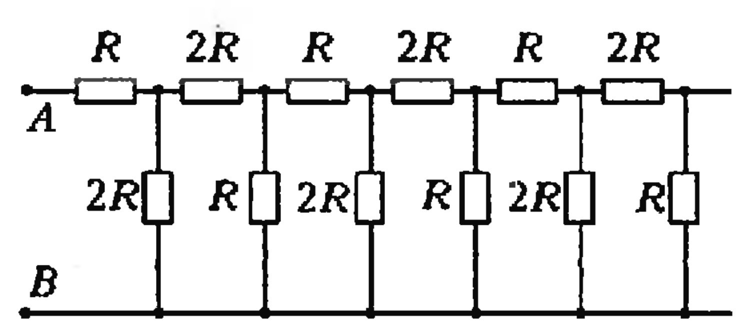


Рис.1

Добавим к бесконечной цепочке еще два таких звена, полученная «удлиненная» цепь (рис.2) ничем не отличается от исходной – ее сопротивление останется тем

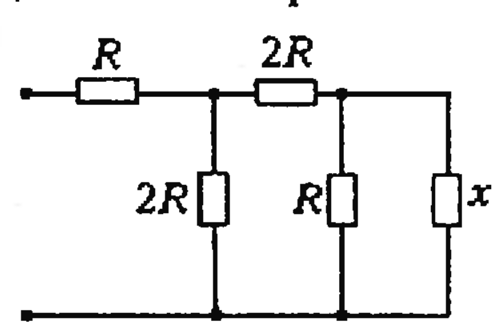


Рис.2

же. Обозначив искомую величину x, получим для ее определения простое уравнение

$$\frac{\left(\frac{Rx}{R+x}+2R\right)2R}{\frac{Rx}{R+x}+2R+2R}+R=x.$$

Отсюда находим

$$R_{AB}=x=R\frac{7+\sqrt{49+160}}{10}\approx 2{,}15R.$$

А.Зильберман

Ф1590. *Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L. В тот момент, когда заряд конденсатора Q, а ток катушки I, параллельно подключают еще одну катушку индуктивностью 2L. Найдите максимальный заряд конденсатора после такого подключения. Как изменится ответ, если вместо катушки подключить в тот же момент конденсатор емкостью 2C? Элементы цепи считать почти идеальными.*

При подключении еще одной катушки можно считать энергию системы неизменной и равной ее начальному значению

$$W_0=\frac{LI^2}{2}+\frac{Q^2}{2C}.$$

Максимальный заряд конденсатора получается в тот момент, когда ток заряда обращается в ноль. Для обычного колебательного контура это соответствует нулевому току катушки и ее нулевой энергии. В нашем же случае нулю равен *суммарный* ток двух катушек и не вся энергия системы в интересующий нас момент окажется в конденсаторе. Итак, после подключения катушки индуктивностью $2L$ к интересующему нас моменту ток катушки индуктивностью L изменится от начального значения I до некоторого I_1, а ток второй катушки также составит по величине I_1, но будет течь в противоположном направлении. Из условия неизменности магнитного потока в контуре из двух катушек (активное сопротивление этого контура мало) можно записать

$$L(I-I_1)=2LI_1,\ I_1=\frac{I}{3}.$$

Теперь получим искомый заряд Q_1, используя закон сохранения энергии:

$$\frac{L(I/3)^2}{2}+\frac{2L(I/3)^2}{2}+\frac{Q_1^2}{2C}=W_0,\ Q_1=\sqrt{Q^2+\frac{2}{3}LCI^2}.$$

В случае с подключением конденсатора энергия контура не сохраняется — хотя элементы цепи почти идеальные и сопротивление проводов можно считать очень малым, токи перезаряда конденсаторов сразу после такого подключения оказываются очень большими и непременно часть энергии уйдет в тепло. Только после того как заряды параллельно соединенных конденсаторов установятся, можно будет записать новый энергетический баланс:

$$\frac{Q^2}{6C}+\frac{LI^2}{2}=\frac{Q_2^2}{6C},\ Q_2=\sqrt{Q^2+3LCI^2}.$$

Нас интересует максимальный заряд первого конденсатора — он составляет

$$\frac{Q_2}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{Q^2+3LCI^2}.$$

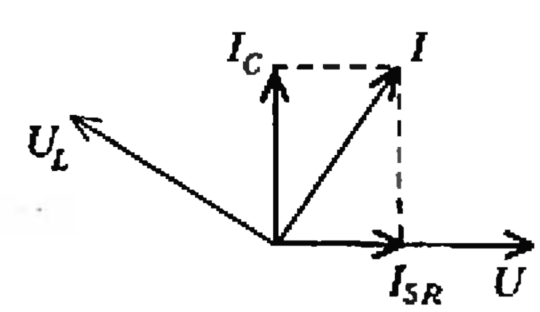
Р.Александров

Ф1591. *Источник переменного напряжения частоты ω имеет внутреннее сопротивление R. Известно, что максимальную мощность в нагрузке можно получить в том случае, когда сопротивление нагрузки в точности равно внутреннему сопротивлению источника (как и для цепей постоянного тока). Однако сопротивление нагрузки составляет 5R. Как нужно включить в цепь катушку индуктивности и конденсатор и какими они должны быть, чтобы мощность в нагрузке оказалась максимально возможной?*

Для решения этой задачи нужно уметь пользоваться одним из методов расчета цепей переменного тока — либо методом векторных диаграмм, либо методом комплексных амплитуд, связанным с использованием комплексных чисел. (Есть и другие методы расчета — годится любой, который может привести к ответу.) Мы воспользуемся методом векторных диаграмм. Он сводится к рисованию векторов, которые изображают токи и напряжения в цепи, пока не получится какой-нибудь известный вектор — он и поможет определить остальные.

Рассмотрим следующее подключение нагрузки к источнику: параллельно резистору сопротивлением $5R$ включим конденсатор емкостью C, последовательно с ними соединим катушку индуктивностью L и получившуюся цепь присоединим к источнику. Нам нужно так подобрать емкость конденсатора и индуктивность катушки, чтобы для источника внешняя цепь представляла собой «чистый резистор» сопротивлением R.

Начнем строить векторную диаграмму (см. рисунок). Для начала нарисуем вектор U, который изображает



напряжение резистора сопротивлением $5R$ (и конденсатора, конечно). Затем на этой же картинке нарисуем векторы, изображающие ток резистора $I_{5R}=U/(5R)$, ток конденсатора $I_C=U\omega C$ и суммарный ток $I=\sqrt{(U/(5R))^2+(U\omega C)^2}$. Теперь нарисуем вектор, который изобразит напряжение катушки, — он на $\pi/2$ опережает по фазе ток катушки, а через катушку и источник течет ток I, который мы записали выше. Напряжение катушки $U_L=I\omega L$. Теперь осталось сообразить, что сумма векторов, изображающих напряжение резистора — конденсатора и напряжение катушки, равна напряжению источника U_0. А для того чтобы вся цепь представляла собой резистор сопротивлением R, должно выполняться одновременно два условия: суммарный вектор напряжения должен быть параллелен вектору, изображающему общий ток (сдвиг фаз в цепи с резистором должен быть равен нулю), и должно выполняться соотношение $U_0 = RI$.

Из «треугольника» для токов определим синус угла между I и U, а затем потребуем, чтобы проекция вектора U на перпендикулярное току I направление в точности скомпенсировала вектор U_L (этот вектор перпендикулярен вектору, изображающему ток I). А составляющая вектора U вдоль вектора I — эта составляющая и есть напряжение источника U_0 — должна быть равна RI.

После нудных вычислений получим

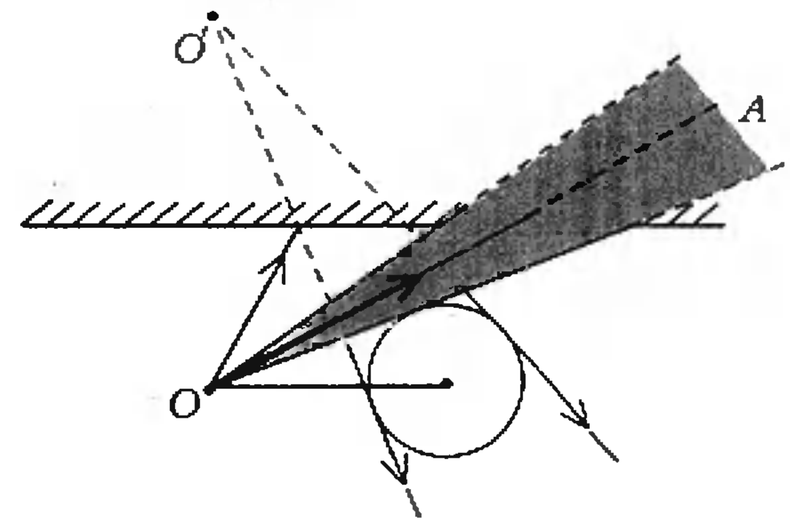
$$L = \frac{2R}{\omega},\ C = \frac{1}{2{,}5\omega R}.$$

Это и есть ответ.

А.Зильберман

Ф1592. *На оси длинной трубы с зеркальной внутренней поверхностью находятся изотропный точечный источник света и полностью поглощающий падающий свет шарик радиусом 1 см. Центр шарика находится на расстоянии 2 см от источника. Каким должен быть внутренний диаметр трубы, чтобы шарик поглощал ровно половину испускаемой источником энергии?*

Нарисуем плоскую картинку хода лучей (см. рисунок). Ясно, что для выполнения условия задачи все лучи, выходящие из источника направо, что соответ-



ствует правой полуплоскости, должны непосредственно или после отражения от стенки трубы попасть на шарик. Для изображенного на рисунке случая это явно не так — луч OA после отражения не попадет на шарик. Следовательно, труба должна быть такой узкой, чтобы для луча OA места не было — соответствующий сектор (на рисунке он залит) не должен существовать. Из простых геометрических соображений радиус трубы при этом должен составлять

$$r = \frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\sqrt{1 - R^2/l^2}} = \frac{1\text{ см}}{\sqrt{1 - 1/4}} \approx 1{,}15\text{ см}.$$

Диаметр трубы, как обычно, в два раза больше.

Следует отметить, что критичным является отсутствие именно этого выделенного сектора — слева все в порядке и нужно учитывать возможность многократных отражений.

З.Рафаилов

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «ЗАДАЧНИК «КВАНТА» 1995 — 1996 годов

I место заняли

по математике

Гуляев Михаил — Нижний Новгород,

по физике

Гуляев Леонид — Нижний Новгород.

II место заняли

по математике

Скопин Владислав — Липецк,

по физике

Милищук Анатолий — Ровно, Украина.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Баторшин Рашид — Запорожье, Украина,
Волков Олег — Димитров, Украина,
Евсеев Антон — Москва,
Киселев Андрей — Новосибирск,
Кисунько Вениамин — Москва,
Кукина Екатерина — Омск,
Сошников Константин — п.Черноголовка Московской обл.,
Титов Юрий — Череповец;

по физике

Гуменюк Игорь — Кузнецовск, Украина,
Зенин Антон — п.Протвино Московской обл.,
Качура Борис — Владивосток,
Легеров Евгений — Соликамск,
Мальцев Дмитрий — Северодвинск,
Никулин Максим — Барнаул,
Филимонова Ирина — Москва,
Чувиков Алексей — п.Ноябрьск Тюменской обл.

Задачи

1. Найдите вес рыбы, зная, что ее хвост весит 2 фунта, голова весит столько, сколько весят хвост

и половина туловища вместе, а туловище весит столько, сколько весят вместе голова и хвост.

Из старинного задачника

2. Квадрат разрезан на 36 квадратов. 35 из них имеют площади, равные 1, а один имеет площадь, отличную от 1. Какую?

В.Произволов

3. Решите числовой ребус: замените буквы цифрами и поставьте цифры вместо точек так,

чтобы пример на умножение оказался верным. Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

А.Жуков

4. Фигура, изображенная на рисунке, ограничена полуокружностью с радиусом 2 и двумя полу-

окружностями с радиусами 1. Разрежьте эту фигуру на 4 одинаковые части.

Журнал «Mathematics teacher», т.86, №7

5. Равенство

$$742586 + 829430 = 1212016$$

неверно. Дело в том, что всюду одна из цифр

(назовем ее x) стоит вместо другой цифры (назовем ее y), а вместо цифры x всюду стоит y. Какие это цифры?

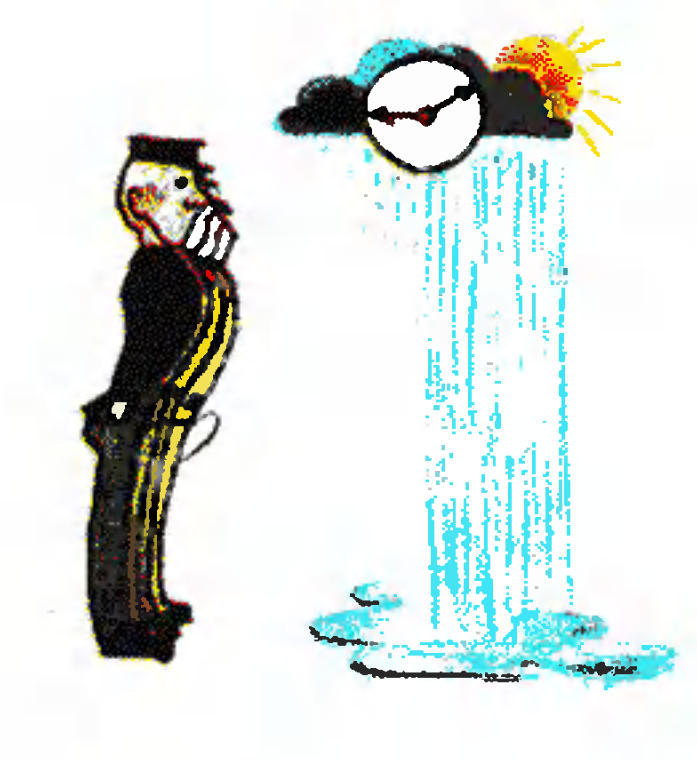
А.Савин

Иллюстрации И.Тарабановой

Предъявите ваши аргументы!

И.ГРИГОРЬЕВА

Приказ командира: «В следующее воскресенье будет военный парад. Если утром будет дождь, парад состоится во второй половине дня, а если дождь будет после обеда, то парад состоится утром.»



Не правда ли, забавное рассуждение! С первого взгляда видно, что этот приказ — неправильный. А сможете ли вы объяснить, в чем именно? Подумав, замечаешь, что все не так просто.

На первый взгляд кажется, что приказ плох тем, что утром мы не знаем, будет ли дождь после обеда. Но для его выполнения и не надо этого знать! Просто, если утром нет дождя, надо начинать парад. Другое дело, если бы командир сказал: «Если утром будет парад, то после обеда пойдет дождь». Такое распоряжение, конечно, выполнить трудно.

Недостаток этого приказа в том, что он не полон. Не сказано, что делать, если дождь будет идти весь день. В этом случае две половины высказывания противоречат друг другу, ну, а противоречивое указание выполнить невозможно.

При решении данной задачи мы предполагали, что парад должен проходить ровно один раз. Если снять это ограничение, то приказ будет непротиворечив. Как будет происходить его выполнение? Если с утра нет дождя, то все ясно — надо проводить парад. А что делать, если дождь идет? Дожидаться хорошей погоды? А вдруг ее не будет? Значит, чтобы выполнить вторую половину приказа, на всякий случай надо проводить парад под дождем. Что же должно происходить во второй половине дня? Так как утром был дождь, то, согласно первой половине приказа, после обеда необходимо провести парад (независимо от того, продолжается ли дождь или нет, ведь об этом в приказе ничего не сказано).

Итак, хотя приказ был издан для того, чтобы уберечь солдат от дождя, точное его соблюдение приводит к тому, что в дождливый день парад придется проводить дважды!

На этом примере видно, как осторожно надо обращаться со словами, чтобы выразить именно то, что вы хотели. Этому надо учиться. А помогает в этом наука логика, которая как раз и изучает способы правильных рассуждений и доказательств.

Обычно в рассуждении (доказательстве) выделяют три основных части: *тезис* (то, что надо доказать), *аргументы* (то, на основе чего мы проводим рассуждения) и сам *вывод*, т.е. логический переход от аргументов к тезису. Ошибки могут возникнуть во всех трех этих частях. Рассматривая разные неправильные рассуждения, логики выделили часто повторяющиеся ошибки и дали им названия. Разберем некоторые из них на примерах.

Ошибки, связанные с тезисом

Учитель: «Надеюсь, Том, я не увижу, что ты списываешь с чужой тетради».

Том: «Я тоже на это надеюсь».

Этот пример не является по форме доказательством, так как здесь фактически сформулирован только тезис. Обоснование (или опровержение) этого тезиса возникнет позже, когда Том напишет свою работу. Этот пример интересен тем, что тезис сформулирован здесь дважды — учителем и учеником. И хотя Том, казалось бы, подтверждает слова учителя, ясно, что он имеет в виду совсем другое. Эта ошибка называется *подмена тезиса* и происходит вследствие *нарушения тождества*. Слова «Я не увижу, что ты списываешь» можно понимать буквально (как делает это Том), а можно в переносном смысле: «Ты не будешь списывать», что и имеет в виду учитель. Соответственно, на контрольной работе Том будет «доказывать» не тезис учителя (т.е. не будет списывать), а свой тезис (т.е. попытается сделать это незаметно).

Нарушение тождества происходит довольно часто в процессе рассуждений, причем не всегда намеренно. Одна из причин этого — многозначность и нечеткость естественного языка. Например, следующее рассуждение по форме весьма логично:

Движение вечно. Хождение в школу — движение. Значит, хождение в школу — вечно.

Вывод — явно абсурдный. Причина в том, что по ходу рассуждения меняется смысл слова *движение*: сначала это обобщенное понятие, а потом — конкретное.

— *А вдруг не вырастет? - спросил Пух.*

— *Вырастет, потому что Кристофер Робин сказал, что вырастет. Поэтому я и сажаю.*

Эта ошибка — *обращение к авторитету* — является частным случаем так называемого *довода к человеку*. В учебниках по логике ее относят к ошибкам, связанным с тезисом. В этом случае также можно считать,

Иллюстрации Д.Гришуковой

что тезис подменяется: вместо разбора дела по существу говорят о мнении какого-то человека о нем. К этому же типу относятся рассуждения вида: «Надо поставить ему хорошую оценку, так как он много работал, старался все выучить», хотя на самом деле надо говорить о том, знает ли ученик предмет или нет. Вы сами достаточно часто встречались со случаями, когда вместо разговора о деле говорят о хороших или плохих качествах человека — автора или оппонента. К этому же типу относится так называемый *довод к публике*, когда слушателей пытаются убедить не логичностью рассуждений, а воздействием на эмоции: жалость, гнев, патриотизм, страх и т.д.

Ошибки в аргументах

Над прилавком в магазине написано: «У нас есть все, что вам нужно!» Немного пониже приписка: «Если у нас чего-нибудь нет, значит, это вам не нужно»..

Первая из надписей является посылкой (аргументом), а вторая —

заключением (тезисом). Посылку можно записать в форме *Если А, то В*, а именно: *Если вам что-то нужно, то у нас это есть*. Тогда заключение приобретает вид: *Если не В, то не А*, что, как известно, равносильно первому высказыванию. В данном случае рассуждение правильное, но исходная посылка неверна, что и приводит к абсурдному выводу. Эта ошибка называется *ложное основание* (или *основное заблуждение*).

— Девочки, знаете, тоже едят яйца.

— Я этому не верю, — сказала Горлица. — Но если это так, значит, они тоже змеи. Больше мне нечего сказать.

Здесь исходное высказывание (слова Алисы, посылка) верно, но его недостаточно, чтобы сделать такой далеко идущий вывод. Ошибка так и называется *недостаточное основание*. Впрочем, с точки зрения Горлицы никакой ошибки здесь нет, просто у нее своя терминология. И действительно, какая разница для бедной птицы, кто именно съест ее будущих птенцов!

Евреи спрашивают раввина, откуда взялся обычай, запрещающий правоверному еврею ходить с непокрытой головой. Тот отвечает:

— Уже в книге «Исход», глава XIX, стих XV, сказано: «И сошел Моисей к народу...»

— Но где же тут о головном уборе?

— Как это? Чтобы Моисей вышел к народу без ермолки?!

Ошибку этого рассуждения можно отнести к типу *порочный круг*: утверждение выводится в конечном счете из себя самого. Заметьте, что ошибка сопровождается здесь повышенной эмоциональностью (довод к публике). Говорят, Уинстон Черчилль на полях своих докладов делал пометки: «Аргумент слабый, повысить голос».

Ошибки вывода

Ошибок такого рода — великое множество. Они возникают, когда из правильных предпосылок пытаются вывести тезис, но делают логические ошибки в самом умозаключении. Такую ошибку называют *не следует*, подразумевая, что тезис не следует из аргументов.

Например, в естественных и гуманитарных науках очень часто выводы приходится делать на основе конечного (а иногда и весьма скудного) набора фактов. При этом применяется так называемая *неполная индукция*, когда выводы обо всех объектах приходится делать, зная свойства только части их, причем весьма небольшой. Скажем, вы хотите доказать, что Лох-Несского чудовища не существует. Большое количество исследований дало отрицательный результат — Несси до сих пор не найдена. Мы можем верить, что ее не существует. Но можем ли мы считать это доказанным? Очевидно, нет. Неполная индукция необходима, но она не дает достоверных выводов, а только вероятные. Для повышения точности этого метода применяются различные логические и практические приемы. Неправильное же применение этого метода приводит к ошибке, называемой *поспешное обобщение*. В математических доказательствах неполная индукция неприменима.

В дедуктивных умозаключениях, т.е. при переходе от общего к частному, тоже часто делают ошибки. Например, незаметно для себя меняют условие и заключение (аргумент и тезис). Но, как известно, из правильности прямой теоремы правильность обратной еще не следует. Вот что говорилось об этом на Безумном Чаепитии:

— Так бы и сказала, — заметил Мартовский Заяц. — Нужно всегда говорить то, что думаешь.

— Я так и делаю, — поспешила объяснить Алиса. — По крайней мере... По крайней мере, я всегда думаю то, что говорю... а это одно и то же...

— Совсем не одно и то же, — возразил Болванщик. — Так ты еще скажешь, будто «Я вижу то, что ем» и «Я ем то, что вижу» одно и то же!

— Так ты еще скажешь, будто «Что имею, то люблю» и «Что люблю, то имею» — одно и то же! — подхватил Мартовский Заяц.

— Так ты еще скажешь, — проговорила, не открывая глаз, Соня, — будто «Я дышу, пока сплю» и «Я сплю, пока дышу» — одно и то же!

— Для тебя-то это, во всяком случае, одно и то же! — сказал Болванщик, и разговор на этом оборвался.

Утверждение типа «Из *А* следует *В*» не равносильно тому, что «Из *В* следует *А*», хотя, как уже было сказано, равносильно утверждению «Из не-*В* следует не-*А*». Такого рода рассуждения применяются при доказательстве «от противного». Чтобы их применять, нужно научиться формулировать противоположное высказывание, т.е. применять к предложению частицу «не». Думаете, это просто? Вовсе нет.

Как известно, высказывание «*Наполеон умер в 1996 г.*» является ложным. Тогда отрицание этого высказывания истинно. Как оно звучит? Обычно отвечают так: противоположное высказывание — «*Наполеон умер не в 1996 г.*» Это высказывание само по себе, конечно, истинно, но не является отрицанием первого. Действительно, подставьте вместо имени *Наполеон*, например, *Иванов*. Тогда фраза *«Иванов умер не в 1996 г.»* может означать, что Иванов вообще не умирал. Так что правильным ответом будет *«Наполеон не умер в 1996 г.»*, ведь законы логики одинаковы и для императоров, и для простых смертных.

Мы видим, что отрицание высказывания состоит в том, что частица «не» прибавляется к сказуемому. Неправильное применение отрицания может привести к логическим ошибкам.

Как в данном примере получить верное высказывание *«Наполеон умер не в 1996 г.»*? Надо воспользоваться дополнительной информацией. Из истории мы точно знаем, что Наполеон умер. Две верных посылки *«Наполеон не умер в 1996 г.»* и *«Наполеон умер»* и дают нам искомый ответ. Фактически мы дополнили задачу сведениями, не сформулированными в ней явно.

Существуют определенные правила применения отрицания к сложным высказываниям. Например, в противоположном высказывании *или* переходит в *и*, любой (*каждый*) — в *существует* и наоборот.

Смешанные ошибки

В большинстве конкретных случаев довольно сложно, а иногда и невозможно отнести ошибку рассуждения к какому-то одному типу. Например, если тезис пытаются доказать при недостаточном основании, то и сам вывод будет по необходимости неправильным. Поэтому *недостаточное основание* как ошибка аргумента влечет за собой еще одну ошибку — либо ошибку вывода *не следует*, либо *подмену тезиса*.

Отличить *подмену тезиса* от ошибки вывода тоже не всегда легко. Если тезис сформулирован в нескольких вариантах, то какой из них считать еще тезисом, а какой — промежуточным утверждением вывода? Например, в примере с Томом и учителем «доказательство» может выглядеть так: Том списывает незаметно, *значит*, учитель не видит этого, *значит*, его (учителя) высказывание верно. В такой форме ошибка превращается в ошибку вывода (переход от второго высказывания к третьему — неверный). Можно записать рассуждение в такой форме: «Докажем, что учитель не увидит, что Том списывает. Том списывает незаметно, значит, тезис выполняется». В этом случае ошибка превращается в подмену тезиса: доказано не то, что провозглашено. Так что разница между ошибкам — в форме изложения.

Довольно трудно классифицировать ошибки, связанные с нарушением тождества. С одной стороны, изменение смысла понятия происходит обычно в процессе доказательства, поэтому его можно отнести к ошибками вывода. С другой стороны, эти ошибки сопровождаются формально правильными рассуждениями (вспомните пример с движением и хождением в школу), так что природа их несколько другая. Обычно в логике скрытую подмену понятий относят к ошибкам, связанным с тезисом: в норме тезис должен быть ясно и четко сформулирован и не меняться в процессе доказательства.

Упражнения

А теперь постарайтесь сами найти ошибки в рассуждениях и определить их тип.

1. Почему на младенцев надевают длинные рубашечки?

— На них всегда надевают длинные рубашечки!

— Да, но почему?

— Но, сэр! Не надевать же на бедных малюток короткие!

(Джером К. Джером)

2. И пока думаешь, что сказать, делай реверанс! Это экономит время.

Алиса немного удивилась, но Королева внушала ей такое почтение, что возражать она не посмела. «Вернусь домой, — подумала она, — и попробую делать реверанс, когда буду опаздывать к обеду».

(Л. Кэрролл)

3. «Докажем», что при делении одного целого положительного числа на другое может получиться 0. Рассмотрим среди всех дробей m/n с натуральными числителем и знаменателем наименьшую. Если она не равна 0, то ее половина меньше ее самой, что противоречит выбору дроби. Значит, наименьшая дробь вида m/n равна 0.

4. Ученик решал следующую задачу: *«В выпуклом четырехугольнике ABCD суммы квадратов противоположных сторон равны. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны».*

Он привел такое решение: «Предположим, что диагонали четырехугольника перпендикулярны. Обозначим точку пересечения диагоналей через O. Применяя теорему Пифагора к треугольникам OAB, OBC, OCD, ODA, получаем, что суммы квадратов каждой пары противоположных сторон четырехугольника равны $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ и, значит, равны между собой».

5. Муж читает вслух газету: «Каждый пятый ребенок в мире — китаец». Жена: «Слава Богу, у нас только четверо детей!»

6. Теорема. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

«Доказательство». Рассмотрим прямую a и не лежащую на ней точку M. Отметим на прямой две точки A и B. Через три точки можно провести плоскость. Прямая a, имеющая с ней две общие точки, лежит на этой плоскости. Единственность следует из того, что через три точки проходит единственная плоскость.

7. Продавец: «В нашем магазине найдутся ботинки, подходящие на любой размер.»

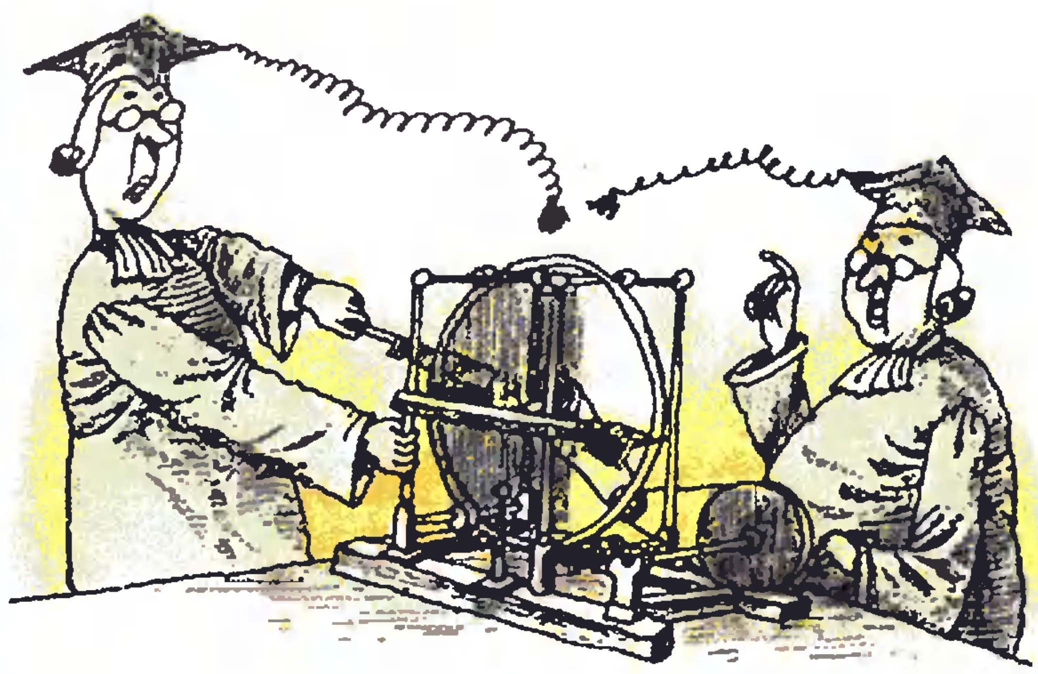
Покупатель: «Вот такие мне и дайте».

8. Запишите высказывания, противоположные данным:

а) Это, конечно, Сова, или я не Винни-Пух.

б) Волков бояться — в лес не ходить.

в) Студент повторял каждую лекцию.



...напряжение — ...усилие, производимое каждой точкой наэлектризованного тела, чтобы избавиться от имеющегося в ней электричества и передать его другим телам...

Алессандро Вольта

Электродвижущее действие проявляется в двоякого рода эффектах... Я назову первый из этих эффектов электрическим напряжением...

Андре Мари Ампер

Учитывая, насколько желательно подчинить расчету... силу столь универсального характера, как электричество,.. мы можем сосредоточить свое внимание на одной особой функции,.. вместо того чтобы рассеивать свое внимание, исследуя каждую из этих сил в отдельности...

Джордж Грин

В каждой точке пространства имеется число, и, когда вы переходите с места на место, это число меняется. Если в какой-то точке пространства поместить предмет, то на него будет действовать сила в том направлении, в котором быстрее всего изменяется это число (я дам ему обычное название — потенциал...).

Ричард Фейнман

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМ ВАМ

потенциал?

Между первым и последним из приведенных высказываний — почти двести лет. Они вобрали в себя одну из самых интересных историй о становлении одного из самых замысловатых физических (и не только!) понятий. Согласитесь, нелегко обнаружить главного персонажа этой истории, скрывающегося под масками то напряжения, то электродвижущей силы, то некой загадочной функции. Все это — потенциал. А со сколькими его разновидностями вам, возможно, еще придется встретиться: контактная разность потенциалов, потенциал ионизации, гравитационный потенциал... А каковы имена ученых, распутывавших терминологический клубок и шлифовавших новое понятие, — Эйлер, Лаплас, Пуассон, Грин, Гаусс!..

Правда, не сразу поймешь, физики ли это или математики? Не удивляйтесь, универсальность этого понятия связана с огромной областью плодотворных его применений — в задачах о распространении тепла, о течении жидкости, в расчетах гравитационных, электрических и магнитных полей.

Пробуя свои силы в решении пусть пока простых проблем, не забывайте о том, что современная теория потенциала — весомый «камень» в фундаменте целой отрасли знаний, называемой математической физикой.

Вопросы и задачи

1. Потенциал электрического поля некоторого заряда убывает по мере удаления от него. Каков знак этого заряда?

2. Всегда ли между проводником, заряженным положительно, и проводником, заряженным отрицательно, есть разность потенциалов?

3. На расстоянии r от центра изолированного проводящего незаряженного шара находится точечный заряд q. Чему равен потенциал шара?

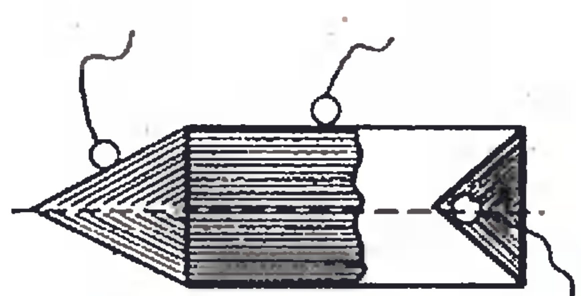
4. Имеется заряженная сфера. Зависит ли потенциал в центре сферы от распределения зарядов на сфере?

5. Внутрь проводящей заряженной сферы через небольшое отверстие вносится (без соприкосновения) металлический шарик, заряд которого равен по величине, но противоположен по знаку заряду сферы. Как изменится потенциал сферы?

6. Как меняется потенциал поля сферического конденсатора с радиусами внутренней обкладки R_1 (заряд $+q$) и внешней R_2 (заряд $-q$) в зависимости от расстояния r от центра сфер? Начертите график.

7. Двум удаленным друг от друга проводникам сообщены положительные заряды так, что потенциал первого 100 В, а второго 50 В. Будут ли положительные заряды переходить с первого проводника на второй, если привести их в соприкосновение (никаких других тел вблизи нет)?

8. Пробный шарик соединяют проволочкой с электрометром и обводят

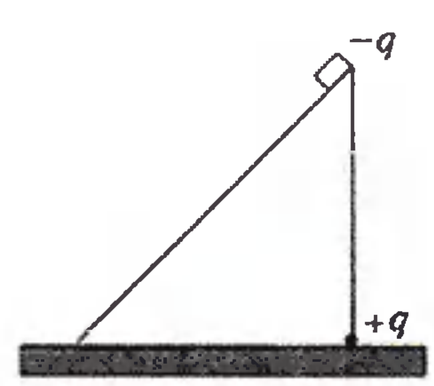


по всему контуру заряженного тела, изображенного на рисунке. Будут ли при этом меняться показания электрометра? Почему для этого опыта берут длинную проволочку?

9. В однородное электрическое поле плоского конденсатора помещен проводящий незаряженный шар так, что центр его находится на равных расстояниях от пластин конденсатора. Потенциалы пластин равны +100 В и −100 В соответственно. Что представляет собой поверхность нулевого потенциала?

10. Упругий металлический шарик, несущий заряд q, закреплен на изолирующей упругой подставке. На него с высоты h падает точно такой же и так же заряженный второй шарик. На какую высоту поднимется второй шарик после удара о первый?

11. По гладкой наклонной плоскости, составляющей угол 45° с горизонтом, соскальзывает небольшое тело,



несущее заряд $-q$. Повлияет ли на его скорость у основания наклонной плоскости заряд $+q$, закрепленный так, как показано на рисунке?

12. Между точками A и B некоторой цепи, содержащей конденсаторы, разность потенциалов равна U. Если к этим точкам присоединить конденсатор емкостью C, то будет ли его заряд равен CU?

13. Параллельно пластинам заряженного и отключенного от батареи плоского конденсатора вводят незаряженную металлическую пластину, толщина которой в два раза меньше расстояния между обкладками. Как изменится разность потенциалов между обкладками?

14. Почему к оборванному трамвайному проводу, лежащему на земле, следует подходить все более мелкими шажками?

15. Между любыми двумя точками однородного проволочного кольца разность потенциалов равна нулю, а ток в кольце существует. Когда это возможно?

16. Можно ли, находясь в самолете, летящем в магнитном поле Земли, обнаружить разность потенциалов, возникающую между концами крыльев самолета?

17. Вольфрамовый шарик, находящийся в вакууме, облучают ультрафиолетовым светом. Как со временем будет меняться потенциал шарика?

Микроопыт

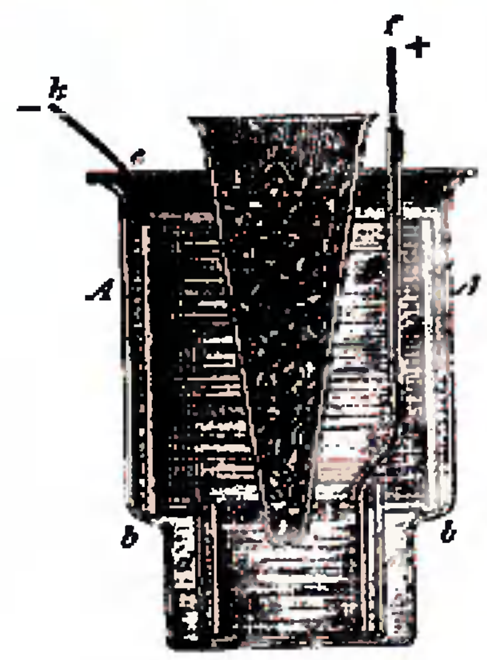
Известно, что вблизи поверхности Земли напряженность электрического поля такова, что на расстоянии между уровнем вашего носа и уровнем пяток разность потенциалов составляет около 200 В. Сможете ли вы использовать это напряжение, чтобы зажечь электрическую лампочку? Не опасно ли такое напряжение для вас?

Любопытно, что...

...Вольта, обнаруживший контактную разность потенциалов, введший в науку термин «напряжение», отмеченный потомками присвоением единице электрического напряжения наименования «вольт», создавший «вольтов столб» — «самый замечательный, — по словам французского ученого Доминика Араго, — прибор, когда-либо изобретенный людьми, не исключая телескопа и паровой машины», не имел ни малейшего представления о том, как и почему этот прибор работает.

...прохождение тока через электролит приводит к появлению ЭДС, направленной «навстречу» приложенной извне. На это явление, названное гальванической поляризацией, натолкнулись в начале XIX века. В дальнейшем оно легло в основу изобретения кислотного аккумулятора.

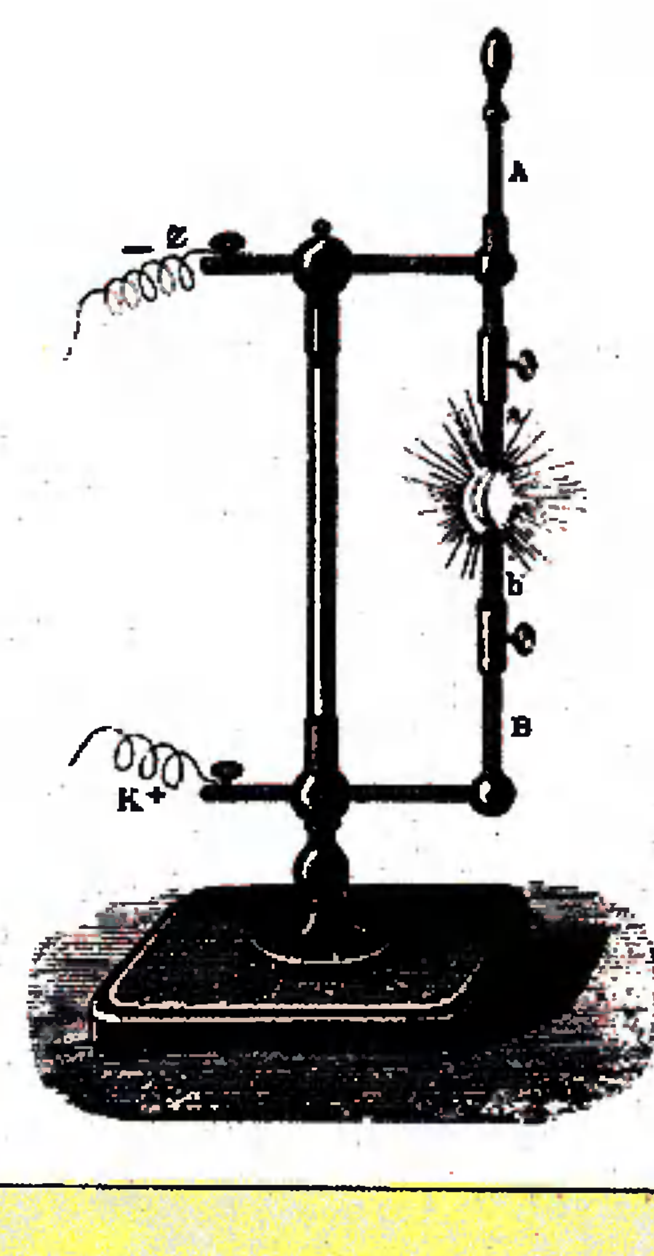
...задачу о распределении электричества на проводнике заданной формы наметил в свое время Кулон. Именно решая такого рода задачи, Пуассон, еще до Грина и Гаусса, пришел к мысли ввести некоторую функцию, зависящую от координат и принимающую постоянное значение на поверхности проводника.



...свою работу «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» Грин написал, будучи самоучкой. До сорока лет, когда он поступил (!) в Кембриджский университет, Грин работал пекарем и мельником, самостоятельно штудируя науки. Важно отметить, что, вводя понятие потенциальной функции, Грин не связывал его с понятием работы, еще не используемым в физике.

...электрический ток может протекать не только в цепи, где разность потенциалов между двумя произвольно взятыми точками равна нулю, но и течь от меньшего потенциала к большему, как, скажем, внутри источников тока.

...существуют такие электрические поля, для которых определить напряженность можно, а потенциал — нельзя. Например, поле, возникающее при электромагнитной индукции. Именно такие («непотенциальные») поля обеспечивают работу трансформаторов и электродвигателей.



...крупный угорь «вырабатывает» напряжение до 600 вольт при токе до 1 ампера. Это оказывается возможным за счет множества цепочек из последовательно соединенных электрических клеток, в каждой из которых создается разность потенциалов около 0,15 вольта. Сами же цепочки «подключаются» параллельно, поэтому суммарным током угорь способен оглушить или даже убить жертву.

...когда вы двигаетесь по ковру и, прикоснувшись к чему-либо, извлекаете электрические искры до сантиметра длиной, ваш потенциал составляет от 10000 до 20000 вольт.

...разность потенциалов (например, между облаком и землей) при возникновении молнии достигает 4 миллиардов вольт, а типичное значение силы тока в молнии порядка 20000 ампер.

...диапазон используемых человеком напряжений «раскинулся» на 12 порядков. Максимально достижимые из них ограничены электрической прочностью изоляторов и составляют миллионы вольт. Минимальные напряжения, с которыми имеют дело в технике, порядка долей микровольта.

Что читать в «Кванте» о потенциале

(публикации последних лет)

1. *«Гроза и грозоотвод»* — 1991, №1, с.35;
2. *«Энергия электрического поля»* — 1991, №8, с.58;
3. *«Первый источник электрического тока»* — 1992, №1, с.35;
4. *«Заряженные частицы в электростатическом поле»* — 1993, №11/12, с.53;
5. *«Электромагнитная индукция»* — 1995, №3, с.45;
6. *«Метод электростатических изображений»* — 1996, №1, с.42;
7. *Калейдоскоп «Кванта»* — 1996, №3, с.32;
8. *«Электризация капель жидкости...»* — 1996, №5, с.44;
9. *«Движение тел в гравитационных полях»* — 1997, №1, с.45;
10. *«Занимательный электролиз»* — 1997, №2, с.40;
11. *«Участок цепи с источником тока»* — 1997, №3, с.35;
12. *«Потенциал электростатического поля»* — 1997, №3, с.41.

Материал подготовил
А.Леонович

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Невесомость ... в автомобиле?» предназначена девятиклассникам, заметка «Участок цепи с источником тока» — десятиклассникам, «Ужасы резонанса» — одиннадцатиклассникам.

Невесомость ... в автомобиле ?

С.ПИКИН

Чтобы безаварийно ездить по дорогам, нужно, конечно, знать правила дорожного движения. Но и законы механического движения — тоже. В этом легко убедиться, например, решая следующую весьма типичную школьную задачу:

С какой скоростью автомобиль должен проходить середину выпуклого моста радиусом 40 м, чтобы пассажир на мгновение оказался в состоянии невесомости?

Свяжем систему отсчета с землей. На пассажира действуют две силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Поскольку в верхней точке моста он находится в состоянии невесомости,

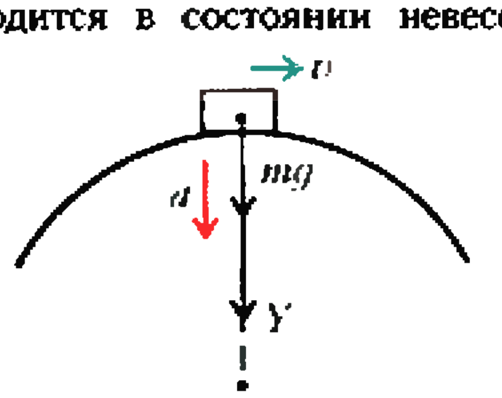


Рис. 1

$N = 0$. Запишем второй закон Ньютона для пассажира в проекциях на ось Y (рис.1):

$$mg = ma, \text{ где } a = \frac{v^2}{R}.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{gR} = 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/ч}.$$

Вроде бы все благополучно: скорость не превышает допустимую. Но если продолжить задачу и задаться вопросом, что будет после прохождения вершины моста (или что было до этого момента), то на смену уверенности в правильности решения приходит убеждение в невозможности ситуации, описанной в условии задачи. Найдем, к примеру, вес пассажира P до того, как автомобиль попал в верхнюю точку моста, если движение автомобиля считать равномерным со скоростью $v = \sqrt{gR}$ (рис.2). Опять запишем уравнение движения пассажира в проекциях на ось Y:

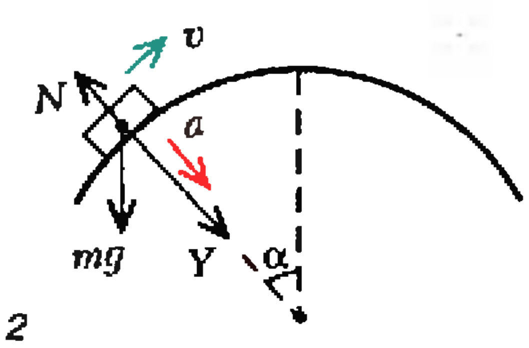


Рис. 2

$$mg\cos\alpha - N = ma,$$

$$\text{где } a = \frac{v^2}{R} \text{ и } v = \sqrt{gR}.$$

Отсюда

$$N = mg(\cos\alpha - 1) \text{ и}$$

$$P = N = mg(\cos\alpha - 1).$$

Получается, что если в верхней точке $N = 0$, то в остальных $N < 0$! Значит, чтобы пассажир не взлетел над сиденьем, он должен за что-то держаться. Но машине «держаться» не за что, т.е. она оторвется от поверхности моста, как только въедет на него, и, пролетев по воздуху, упадет на трассу. Наиболее вероятным результатом такого пребывания в состоянии невесомости будет разбитая машина. Иными словами, попытавшись проехать выпуклый мост со скоростью $v = \sqrt{gR}$, вы не только не сможете на середине моста на мгновение оказаться в состоянии невесомости, но и подвергнетесь риску стать инвалидом.

Как же быть? При какой постоянной скорости автомобиль все же сможет проехать выпуклый мост радиусом R и длиной дуги, соответствующей углу 2α (рис.3)?

Из полученной для N формулы следует, что сила реакции достигает наименьшего значения при въезде на мост. Значит, если машина не взлетит в первый же момент, то этого не произойдет и далее. Тогда имеем

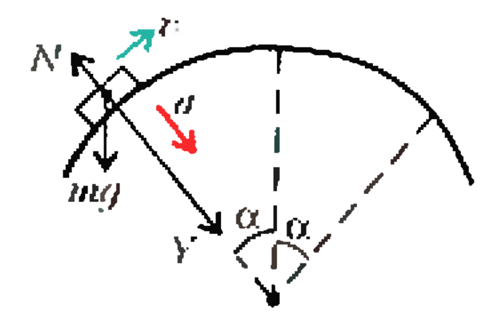


Рис. 3

$$mg\cos\alpha - N = ma,$$

$$\text{где } N \geq 0 \text{ и } a = \frac{v^2}{R},$$

откуда

$$v \leq \sqrt{gR\cos\alpha}.$$

Вот она скорость, с которой можно проехать мост. А состояние невесомости при этой скорости вы испытаете даже дважды: въезжая на мост и съезжая с него.

Иллюстрация Д.Гришуковой

Автор этой заметки Сергей Пикин учится в 11 классе школы-лицея №19 г. Майкопа.

Участок цепи с источником тока

А. ЧЕРНОУЦАН

Пожалуй, большинство школьников согласится, что основные законы постоянного тока достаточно просты. И законы Ома, и закон Джоуля–Ленца легко запомнить и несложно применять. Но, к сожалению, эта простота кончается при переходе к участку цепи, содержащему источники тока. Начнем с того, что закон Ома для такого участка — назовем его обобщенным законом Ома для участка цепи — в школе вообще не проходят, а он очень полезен как для решения задач, так и для более глубокого понимания теоретических вопросов. Как мы увидим, опираясь на обобщенный закон Ома, можно лучше разобраться в энергетических соотношениях для участка цепи с источником тока.

Обобщенный закон Ома

Обсудим сначала физический смысл закона Ома, относящегося к участку цепи, содержащему только идеальный резистор. Закон Ома утверждает, что для поддержания тока на участке к нему надо приложить постоянное напряжение, причем сила тока и напряжение пропорциональны друг другу: $U = IR$. Но это означает, что для поддержания направленного движения свободных зарядов на них должна действовать постоянная сила со стороны электрического поля $\vec{E}$. В случае участка цепи без источников это поле является электростатическим: $\vec{E} = \vec{E}_{эл}$, оно создается самими зарядами проводника. (В процессе установления тока заряды вдоль всей цепи за очень короткое время перераспределяются таким образом, чтобы создать нужное поле.) Переформулируем закон Ома следующим образом: если ток на участке цепи поддерживается полем $\vec{E}$, то *сила тока пропорциональна работе этого поля по переносу единичного заряда с одного конца участка на другой*. Напомним, что в случае электростатического поля эта работа равна разности потенциалов.

Обозначим один конец участка цифрой *1*, а другой цифрой *2* и запишем закон Ома в виде

$$U_{12} = I_{12}R, \qquad (1)$$

где $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$, $I_{12} = +I$, если ток течет от *1* к *2*, и $I_{12} = -I$ для тока, текущего навстречу движению, т.е. от *2* к *1*. Такая форма записи, позволяющая передвигаться по участку цепи в любом направлении, очень удобна.

Теперь предположим, что на этом же участке цепи действуют сторонние силы. Вспомним, что численной характеристикой сторонних сил является ЭДС (электродвижущая сила), которая определяется как *работа сторонних сил по переносу единичного заряда с одного конца участка цепи на другой*. Определим величину $\mathcal{E}_{12}$ как работу сторонних сил по переносу единичного заряда от *1* к *2*, т.е. $\mathcal{E}_{12} = +\mathcal{E}$, если сторонние силы направлены по движению (от *1* к *2*), и $\mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}$ в противоположном случае (рис. 1).

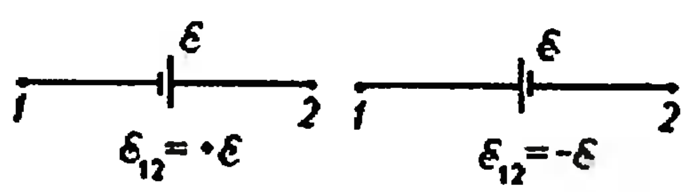


Рис. 1

Направленное движение зарядов на участке цепи теперь поддерживается как электростатическим полем $\vec{E}_{эл}$, так и полем сторонних сил $\vec{E}_{ст}$. Точнее, оно определяется суммарным полем $\vec{E} = \vec{E}_{эл} + \vec{E}_{ст}$, и поскольку заряды не могут «отличить» суммарное поле от чисто электростатического, то разумно предположить, что сила тока так же зависит от суммарного поля, как раньше (в отсутствие источников) она зависела от электростатического поля. А именно, *сила тока пропорциональна работе суммарного поля $\vec{E}$ по переносу единичного заряда с одного конца участка на другой*. Эта работа состоит из двух частей — из работы электростатического поля, равной разности потенциалов, и из работы сторонних сил, равной, по определению, ЭДС:

$$I_{12}R = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \qquad (2)$$

где R — сопротивление участка цепи, включая внутреннее сопротивление источника.

Еще раз сформулируем правила знаков. Если направление тока на рассматриваемом участке неизвестно, то его выбирают произвольным образом (если после расчетов получится $I < 0$, значит, действительное направление тока противоположно выбранному, но величина тока найдена правильно). При движении от точки *1* к точке *2* надо записать $I_{12} = I$, если мы идем по току, и $I_{12} = -I$, если против. Если мы идем по сторонним силам, то $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}$, а если

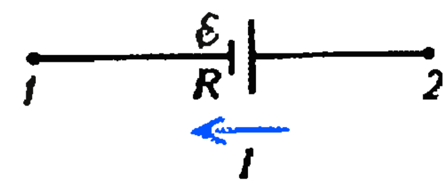


Рис. 2

против, то $\mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}$. Например, для рисунка 2 получаем

$$-IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}.$$

Разберем теперь несколько примеров на применение обобщенного закона Ома.

Вывод закона Ома для полной цепи. Рассмотрим замкнутую неразветвленную цепь. Начнем с простейшего случая, когда в цепи имеется только один источник тока (рис. 3). Ток течет в

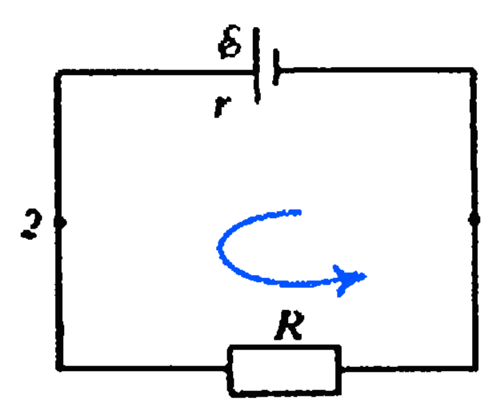


Рис. 3

направлении сторонних сил этого источника; пройдя контур в этом направлении, запишем обобщенный закон Ома для участка с источником и для участка с внешним сопротивлением:

$$Ir = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}, \quad IR = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$I(r + R) = \mathcal{E}.$$

Разности потенциалов сократились, потому что работа электростатических сил по замкнутому контуру равна нулю. В случае многих источников направление тока заранее неизвестно; выбираем его произвольно и проходим контур в этом направлении. Записав соответствующие уравнения, получим

$$I\sum R_i = \sum \pm\mathcal{E}_i$$

(разности потенциалов опять сократятся, поскольку потенциал каждой точки встретится дважды, но с разными знаками). Если сила тока окажется отрицательной, то направление тока надо изменить на противоположное.

Правила Кирхгофа. Перейдем теперь к рассмотрению разветвленной цепи. В качестве конкретного примера применения общих правил будем использовать цепь на рисунке 4. Задача — найти токи на всех участках цепи.

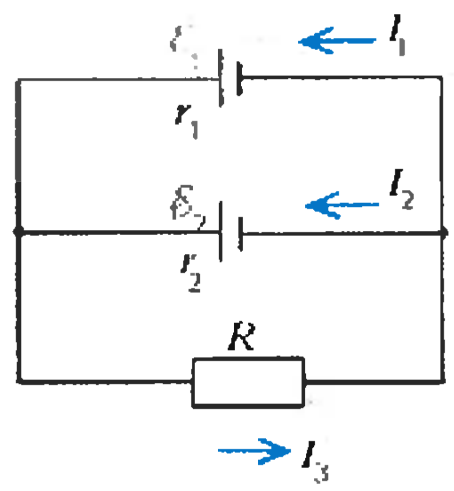


Рис. 4

В любом случае начинают с того, что произвольным образом выбирают направления неизвестных токов. Так как при протекании токов через любой узел на нем не должен накапливаться заряд, алгебраическая сумма входящих в этот узел токов и токов, выходящих из узла, должна быть равна нулю. (Принято входящие токи брать со знаком плюс, а выходящие — со знаком минус.) Это — *первое правило Кирхгофа*, или *правило узлов*. Его можно записать для каждого из $n-1$ узлов. Для получения оставшихся уравнений поступают так: выбирают произвольный замкнутый контур и обходят его в произвольном направлении. Если записать на каждом участке обобщенный закон Ома, а потом сложить полученные уравнения, то разности потенциалов сократятся, и мы придем к уравнению

$$\sum \pm I_i R_i = \sum \pm\mathcal{E}_i\,,$$

где правила знаков соответствуют описанным раньше. Это — *второе правило Кирхгофа*. Для схемы на рисунке 4 получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1 r_1 + I_3 R = \mathcal{E}_1, \\ I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

(направление обхода контуров — против часовой стрелки).

Метод узловых потенциалов. Если в методе Кирхгофа неизвестными в уравнениях являются токи, то в данном методе составляются уравнения для потенциалов узлов. При этом один из потенциалов узлов принимают равным нулю (потенциал определен с точностью до константы), так что число уравнений получается на одно меньше, чем число узлов. С помощью обобщенного закона Ома выражают каждый из проходящих узел токов, после чего записывают правило узлов — алгебраическая сумма входящих и выходящих токов равна нулю.

Для схемы на рисунке 4 примем потенциал левого узла равным нулю, а потенциал правого обозначим через φ; тогда получим *одно* уравнение

$$\frac{(\varphi-0)+\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{(\varphi-0)+\mathcal{E}_2}{r_2} - \frac{0-\varphi}{R} = 0$$

(сумма токов, входящих в левый узел и выходящих из него, равна нулю). Найдя потенциалы всех узлов, с помощью обобщенного закона Ома вычисляем токи (заметим, что выражения для токов нами были уже записаны при составлении уравнения).

Батарея источников тока. Несколько соединенных между собой источников, подключенных к внешней цепи, удобно заменить одним эквивалентным источником. В школьном курсе приводится ответ для параллельного и последовательного соединения *одинаковых* источников. Для последовательного соединения ответ легко обобщается на случай разных источников. Для случая параллельного соединения разных источников поступим следующим образом.

Запишем обобщенный закон Ома для каждого источника:

$$I_k r_k = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_k$$

(разности потенциалов на всех источниках одинаковы), разделим на r_k и сложим все уравнения:

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2)\sum\left(\frac{1}{r_k}\right) + \sum\left(\pm\frac{\mathcal{E}_k}{r_k}\right)$$

(ток через батарею равен сумме токов). Если разделить на $\sum\left(\frac{1}{r_k}\right)$, то уравнение приобретает вид закона Ома для участка цепи с эквивалентным сопротивлением, вычисляемым по формуле для параллельного соединения сопротивлений:

$$\frac{1}{r} = \sum\left(\frac{1}{r_k}\right),$$

и с эквивалентой ЭДС:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum\left(\pm\frac{\mathcal{E}_k}{r_k}\right)}{\sum\left(\frac{1}{r_k}\right)}.$$

В случае N одинаковых источников ($\mathcal{E}_0$, r_0) получаем обычный ответ: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $r = r_0/N$. Для примера на рисунке 4 можно два источника заменить одним эквивалентным, после чего легко найти ток I_3. (Сделайте это сами и убедитесь, что ответ получается такой же, как с помощью двух других методов.)

Энергетический баланс на участке цепи

Если на участке цепи действуют сторонние силы, то следует говорить о трех членах в энергетическом балансе:

1) Чтобы найти количество выделившегося тепла, надо вычислить работу суммарного поля над зарядами цепи. Как утверждает обобщенный закон Ома, работа суммарного поля над единичным зарядом равна $I_{12}R$; значит, за время t суммарное поле совершит работу

$$Q = I_{12}Rq = I_{12}R(I_{12}t) = I_{12}^2Rt$$

(закон Джоуля–Ленца). Эта величина всегда положительна.

2) Работу сторонних сил над зарядами нужно трактовать как поступление энергии от неэлектростатических источников энергии. Она равна

$$A_{\text{ст}} = \mathcal{E}_{12}q = \mathcal{E}_{12}I_{12}t.$$

Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной.

3) Работа электростатических сил над зарядами равна

$$A_{\text{эл}} = (\varphi_1 - \varphi_2)q = U_{12}I_{12}t.$$

Чтобы понять энергетический смысл этого выражения, заметим, что, в соответствии с обобщенным законом Ома,

$$I_{12}Rq = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12})q,$$

или

$$Q = A_{\text{эл}} + A_{\text{ст}}.$$

Значит, исходя из закона сохранения энергии, можно утверждать, что *работа электростатических сил на участке цепи равна энергии, поступившей в данный участок из оставшейся части цепи* (т.е. *из внешней цепи*). Если эта работа отрицательна, то во внешней цепи работа электростатических сил положительна, т.е. UI имеет смысл энергии, переданной во внешнюю цепь. Таким образом, электростатические силы регулируют обмен энергией между частями цепи.

Обсудим два примера.

КПД источника тока. Для вычисления коэффициента полезного действия надо разобраться, какая величина в данном конкретном случае играет роль полной (затраченной) работы, а какая — полезной работы. Рассмотрим ситуацию, когда источник тока является источником энергии для внешней цепи (содержащей, например, идеальный резистор, на котором только выделяется тепло). В этом случае (рис.5,*а*) сторонние силы источника совершают положительную работу $A_{ст} = \mathcal{E}It$, имеющую смысл полной (затраченной) работы, часть энергии $Q = I^2rt$ теряется в источнике в виде тепла, а часть $A_{полезн} = \left(\mathcal{E}I - I^2r\right)t = UIt$ передается во внешнюю цепь. Электростатические силы в самом источнике совершают отрицательную работу, а во внешней цепи — положительную.

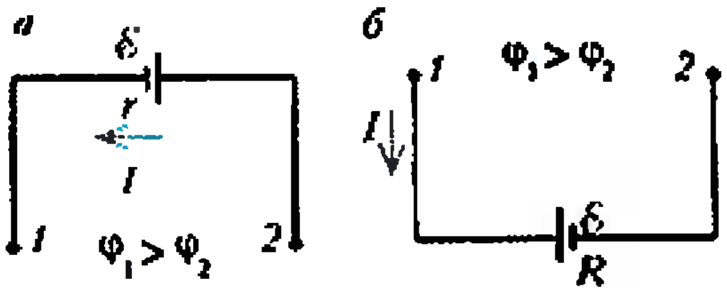


Рис. 5

КПД электромотора. Рассмотрим теперь случай, когда участок цепи получает энергию из внешней цепи, и эта энергия не преобразуется целиком в тепло, а частично идет на совершение работы. Это возможно только тогда, когда на участке есть сторонние силы (на идеальном резисторе вся энергия переходит в тепло). Эти сторонние силы действуют против тока, совершая отрицательную работу (рис.5,*б*), а работа против сторонних сил — положительная.

Например, при работе электромотора в обмотках вращающегося якоря возникает ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}$. В этом случае положительная работа электростатических сил $A_{эл} = UIt$ имеет смысл полной (затраченной) работы, часть энергии $Q = I^2Rt$ теряется в виде тепла, а часть $A_{полезн} = \left(UI - I^2R\right)t = \mathcal{E}It$ представляет из себя полезную работу — механическую работу электромотора.

Аналогичные соотношения можно записать и во многих других случаях (например, при зарядке аккумулятора).

Ужасы резонанса

А.СТАСЕНКО

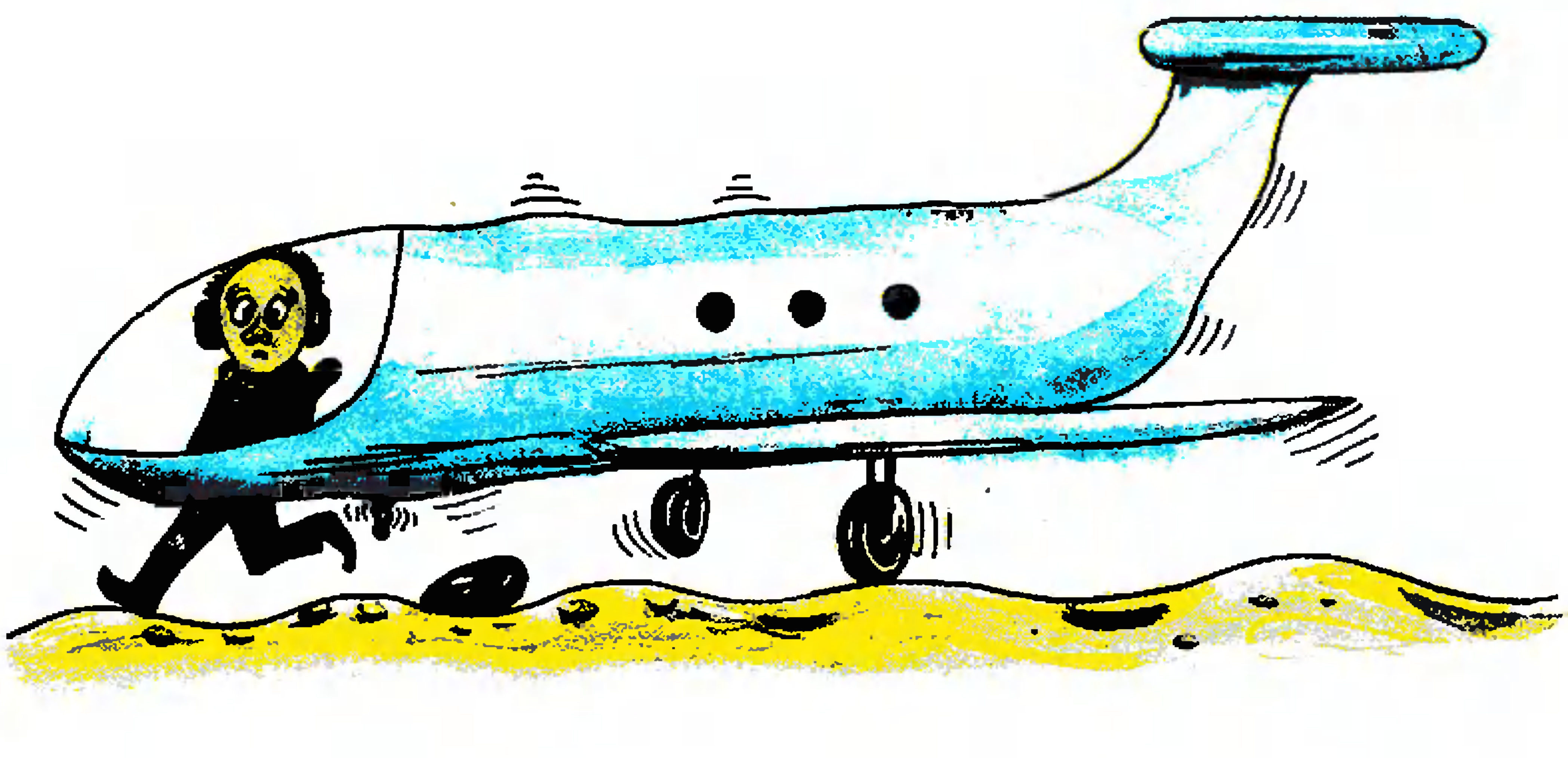
«Глас вопиющего в пустыне: приготовьте путь Господу, прямым сделайте в степи стези Богу нашему; всякий дол да наполнится, и всякая гора и холм да понизятся, кривизны выпрямятся, и неровные пути сделаются гладкими» (Исаия 40:3,4). Ну разве не похоже это на призыв сделать грандиозный аэродром для горизонтального приземления летательного аппарата? И все-таки, как бы ни старались строители, абсолютно ровной взлетно-посадочной полосы сделать не удается. Она всегда получается слегка волнистой. Значит, при быстром движении по ней летательный аппарат может «подпрыгивать». Вот эту ситуацию и рассмотрим.

Пусть летательный аппарат массой m (и, значит, силой тяжести mg) движется с постоянной скоростью v на двух колесах, которые не отрываются от твердого покрытия (рис.1). Пусть каждое колесо снабжено пружиной жесткостью k, которая в недеформированном состоянии имеет длину H. Если в данный момент времени положение центра масс системы над горизонталью OX определяется ординатой y, а высота неровности дороги h, то деформация пружины равна $\Delta y = y - H - h$. Тогда вдоль пружины возникает упругая сила

$$F = -k\Delta y = -k(y - H - h).$$

Здесь знак «минус» указывает на то, что направление силы упругости, действующей на летательный аппарат, противоположно знаку деформации пружины Δy: если пружина растянута, сила направлена вниз, если сжата — вверх; поэтому она является *возвращающей* (в положение равновесия) силой.

Запишем уравнение второго закона Ньютона, описывающего движение эки-



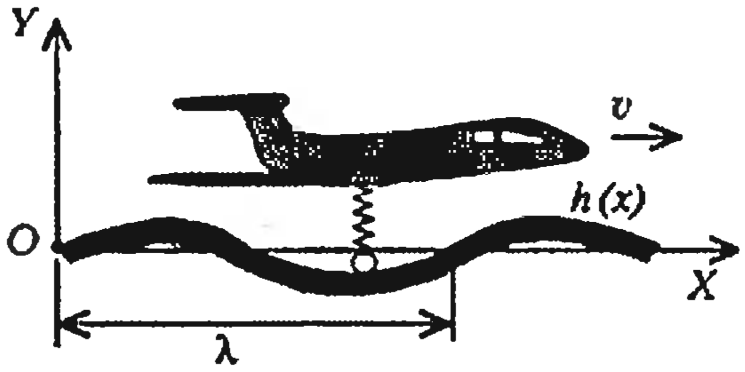


Рис. 1

пажа в вертикальном направлении (в проекциях на это направление):

$$ma_y = -mg + 2F.$$

(Двойка в правой части учитывает, что колеса-то два.) Подставим сюда выражение для упругой силы:

$$ma_y = -mg - 2k(y - H - h).$$

Тут сразу виден частный случай равновесия, когда экипаж стоит себе без движения на дороге (пусть, для простоты, в этой точке $h = 0$). Тогда его ускорение $a_y = 0$, и из последнего уравнения получаем статическую деформацию пружины:

$$y_0 - H = -\frac{mg}{2k}.$$

Вполне понятно, почему она отрицательна: пружина ведь сжата.

Далее удобно будет отсчитывать вертикальное перемещение центра масс аппарата относительно найденного положения равновесия $y_0 = H - mg/(2k)$. Для этого введем смещение относительно положения равновесия:

$$Y = y - y_0.$$

Тогда уравнение движения упростится (мы заодно разделим обе части на массу m) и примет вид

$$a_y = -\frac{2k}{m}(Y - h).$$

Сделаем еще несколько преобразований.

1) Учтем, что ускорение является второй производной от перемещения по времени:

$$a_y = Y''.$$

2) Примем, что неровность посадочной полосы есть гармоническая функция с пространственным (вдоль X) периодом λ (длиной волны) и амплитудой h_0:

$$h = h_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$

3) Вспомним, что при постоянной горизонтальной скорости

$$x = vt.$$

4) Обозначим набор положительных величин так:

$$\frac{2k}{m} = \omega_0^2.$$

Теперь уравнение движения можно записать в виде

$$Y'' + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 h_0 \sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right).$$

Если бы в правой части последнего уравнения стоял ноль, то всякий здравомыслящий читатель узнал бы в нем уравнение свободных гармонических колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$. Но у нас справа не ноль, а гармоническая

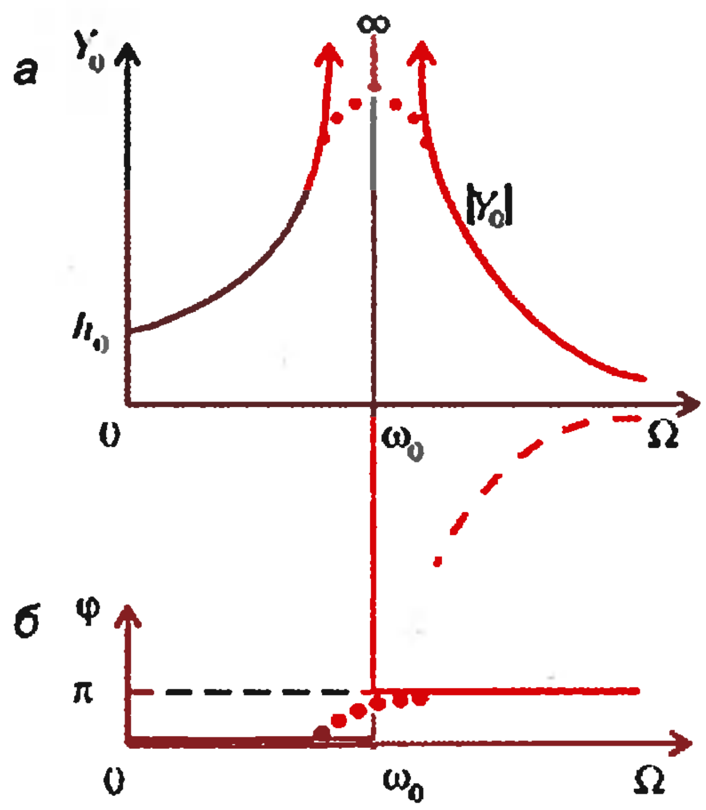


Рис. 2

функция с амплитудой $\omega_0^2 h_0$ и периодом $T = \lambda/v$ или частотой $\Omega = 2\pi/T = 2\pi v/\lambda$, которые задаются внешними условиями — длиной волны λ и максимальным «размахом» неровностей h_0. Поэтому возникающие колебания называются *вынужденными*.

Найдем отклик колебательной системы (движущегося аппарата с двумя пружинами) на внешнее возмущение, вызванное неровностями дороги. Будем искать решение в виде тоже гармонических колебаний с частотой *вынуждающей* силы Ω:

$$Y = Y_0 \sin \Omega t.$$

После двукратного дифференцирования ($Y'' = -\Omega^2 Y_0 \sin \Omega t$), подстановки в уравнение движения и сокращения на $\sin \Omega t$ получим уравнение для искомой амплитуды Y_0:

$$Y_0\left(-\Omega^2 + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 h_0.$$

На рисунке 2,*а* качественно изображена зависимость амплитуды колебаний Y_0 от частоты внешнего возбуждения Ω. Видно, что если Ω стремится к нулю (когда скорость движения мала или аэродром ровен, $\lambda \to \infty$), Y_0 стремится к h_0. Это понятно: при малой скорости движения или очень большой длине волны неровностей движущийся аппарат просто отслеживает их профиль. Но если длина волны неровностей аэродрома и скорость движения окажутся такими, что вынужденная частота $\Omega = 2\pi v/\lambda$ совпадет с собственной частотой $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$, произойдет нечто ужасное: амплитуда колебаний станет неограниченно большой ($Y_0 \to \infty$) и может произойти разрушение системы. Это так называемый случай *резонанса*. Далее, если $\Omega > \omega_0$, значение Y_0 становится отрицательным (см. штриховую кривую на рисунке 2,*а*), но знак «минус» можно спрятать в аргумент синуса:

$$-|Y_0| \sin \Omega t = |Y_0| \sin(\Omega t + \pi).$$

Иными словами можно сказать, что фаза колебаний φ изменяется на π в окрестности частоты вынуждающей силы $\Omega = \omega_0$ (рис.2,*б*).

Конечно, инженеры и ученые делают все, чтобы избежать ужасов резонанса (т.е. $|Y_0| \to \infty$). Прежде всего, можно ввести в колебательную систему так называемое демпфирование (если не хватает всегда присутствующего стока энергии — трения) — например, цилиндр с маслом и поршнем, соединенным с пружиной. Тогда в уравнение движения нужно будет ввести соответствующую диссипативную силу (приводящую к диссипации механической энергии, т.е. ее рассеянию, переходу в тепло), и $|Y_0|$ не будет уходить в бесконечность (см. точечную кривую на рисунке 2). Далее, волнистость аэродрома совсем не обязательно описывается единственной гармонической функцией (с постоянной длиной волны λ). Наконец, кто же ездит по аэродрому с постоянной скоростью? Любой летательный аппарат стремится поскорее или разогнаться перед взлетом, или затормозиться при посадке.

А вот для наземных экипажей (например, железнодорожного вагона) и λ (длина рельса), и v (скорость движения) постоянны, и вы можете почувствовать наступление резонанса: вагон начинает галопировать, либо прыгая строго вертикально, либо совершая вращательные («клюющие») движения вокруг поперечной горизонтальной оси (дифферент) или вокруг продольной горизонтальной оси (боковая качка). Но у вагона много колес и пружин, так что его движение описывается гораздо сложнее, чем рассмотренный нами случай.

Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова

Д.ФЛЕЙШМАН

Постановка задачи

Настольной книгой любителей математики является замечательная книга [1]. В ней собраны различные нестандартные задачи по всем разделам школьной программы, в том числе и задачи на делимость чисел.

Полное решение одной из таких задач не было известно авторам. Один из них — молодой талантливый математик, впоследствии член-корреспондент АН СССР Н.Н.Ченцов (1930—1992) — высказал гипотезу о том, что *для любого натурального числа $k \geq 17$ можно найти k последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного, взаимно простого со всеми остальными.*

Предварительные замечания

Нетрудно видеть, что любые два последовательных натуральных числа всегда взаимно просты. Из трех последовательных натуральных чисел l, $l+1$ и $l+2$ число $l+1$ всегда взаимно просто с остальными. Из четырех последовательных натуральных чисел l, $l+1$, $l+2$ и $l+3$ в зависимости от четности l либо $l+1$, либо $l+2$ взаимно просто с остальными.

Оказывается, что при любом $5 \leq k \leq 16$ среди k оследовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

Упражнения

1. Докажите это.
2. Докажите, что произведение двух последовательных целых чисел не является n-й степенью никакого целого числа при $n \geq 2$.
3. Докажите утверждение упражнения 2 для произведения а) трех; б) четырех последовательных натуральных чисел.

Однако существуют 17 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет общий делитель с каким-нибудь из этих 17 чисел.

Случай $k = 17$

Заметим, что если какие-то два из k последовательных натуральных чисел имеют общий делитель, то существует простое число, меньшее чем k, которое является делителем этих чисел.

Будем говорить, что набор из k *последовательных натуральных чисел обладает свойством* (*), *если среди них нет ни одного числа, взаимно простого со всеми остальными.* Мы будем называть такие набор *-*наборами длины* k.

Рассмотрим набор из k последовательных натуральных чисел. Пронумеруем их натуральными числами от 1 до k. Делимость чисел из набора на простые числа от 2 до p_0, где p_0 — наибольшее простое число, не превышающее $k-1$, удобно показывать на рисунке, где слева от черты находится *простое число*, а справа — *номера тех чисел из набора, которые делятся на это простое число.*

Поясним это на примере. Возьмем семь последовательных целых чисел: 100, 101, …, 106. Простые числа, меньшие 7, т.е. 2, 3, 5, запишем столбиком, затем проведем вертикальную прямую, правее которой напротив каждого из простых чисел выпишем номера чисел из набора, делящихся на это простое число (рис.1).

2	1, 3, 5, 7
3	3, 6
5	1, 6

Рис. 1

Справа от черты ни разу не встречаются числа 2 и 4. Это означает, что числа с этими номерами взаимно просты с остальными.

На рисунке 2 показана делимость чисел от 25 до 44 на простые числа от 2 до 19.

На рисунках 1 и 2 справа от черты находятся арифметические прогрессии, составленные из разного (от 1 до 10) числа членов.

Нетрудно видеть, что эта закономерность носит общий характер. Именно, *набор из k последовательных натуральных чисел будет *-набором тогда и только тогда, когда на соответствующем этому набору рисунке каждое из чисел от 1 до k встречается справа от черты в одной строчке по крайней мере с еще одним числом.* На рисунке 2 числа 10 и 14 стоят в последних строчках в гордом одиночестве, а некоторые числа отсутствуют вовсе.

2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20
3	3, 6, 9, 12, 15, 18
5	1, 6, 11, 16
7	4, 11, 18
11	9, 20
13	2, 15
17	10
19	14

Рис. 2

Согласно этому критерию наборы чисел, изображенные на рисунках 1 и 2, не обладают свойством (*). На рисунке 3 изображено, каким мог бы быть *-набор из 17 последовательных натуральных чисел.

2	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17
3	1, 4, 7, 10, 13, 16
5	2, 7, 12, 17
7	1, 8, 15
11	6, 17
13	1, 14

Рис. 3

Существование такого набора мы вскоре докажем.

Китайская теорема об остатках

Напомним, что «китайская теорема об остатках» — это известное с глубокой древности утверждение о том, что *если натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты, то, каковы бы ни были целые числа $b_1, \ldots, b_n$ ($0 \leq b_i \leq a_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$), существует натуральное число, дающее при делении на a_1 остаток b_1, при делении на a_2 остаток b_2, …, a_n — остаток b_n. Таких чисел бесконечно много и все они являются членами некоторой арифметической прогрессии* (см. [3]).

Задача. *Постройте набор из 17 последовательных натуральных чисел, обладающий свойством (*), на основе рисунка 3.*

Решение. Пусть a — первое из чисел $*$-набора длины 17. Из рисунка 3 видно, что a должно делиться на 2, 3, 7 и 13, давать при делении на 5 остаток 4, а при делении на 11 — остаток 6. Такое число существует по китайской теореме об остатках, так что задачу о существовании $*$-набора длины 17 можно считать решенной.

Упражнение 4. Найдите наименьшее a, удовлетворяющее условию задачи.

Наборов, обладающих свойством $(*)$ и имеющих одинаковое графическое изображение, эквивалентное рисунку 3, бесконечное множество. Наименьшие числа этих наборов принадлежат арифметической прогрессии с начальным членом 2184 и разностью

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030.$$

Рисунок 3 не является единственным графическим изображением $*$-наборов

2	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17
3	2, 5, 8, 11, 14, 17
5	1, 6, 11, 16
7	3, 10, 17
11	1, 12
13	4, 17

Рис. 4

длины 17. Другая возможность показана на рисунке 4.

Упражнение 5. Постройте наименьший возможный $*$-набор, графическим изображением которого служит рисунок 4.

Хотя рисунки 3 и 4 отличаются друг от друга, методы их построения похожи. На рисунке 3 число 7 встречается в прогрессиях, помещенных справа от 2, 3, 5; число $6 = 7 - 1$ встречается в арифметической прогрессии, расположенной справа от 11; число $8 = 7 + 1$ находится в арифметической прогрессии, расположенной справа от 7. Определим, какие числа от 1 до 17 не встречаются в прогрессиях, расположенных справа от 2, 3, 5, 7, 11. Среди чисел от 1 до 7 таких нет, потому что если таким числом является x, то $7 - x$ не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. А поскольку между 5 и 7 нет простых, $x = 6$. Но 6 встречается в арифметической прогрессии, расположенной справа от 11.

Среди чисел от 8 до 17 только $14 = 7 + 7$ не принадлежит прогрессиям, расположенным справа от 13.

Приведенные объяснения позволяют понять, как возник рисунок 3. Аналогично строится набор чисел, графическое изображение которого приведено на рисунке 4.

Обобщение конструкции

Рассмотренный способ построения $*$-наборов длины 17 можно обобщить. На рисунках 5 и 6 показаны два возможных варианта построения $*$-набора длины k при $k = p_i + p_{i+1} - 1$, где p_i, p_{i+1} — соответственно i-е и $(i+1)$-е простое число. Напомним, что 2 — первое простое число, 3 — второе, 5 — третье и т.д. (например, $17 = p_1 + p_5 - 1$). Нетрудно видеть, что при $2p_i >> p_{i+2}$, вне зависимости от значений членов арифметических прогрессий, расположенных справа от p_{i+3}, ..., рисунок 5

2	$\ldots, p_i - 2, p_i, p_i + 2, \ldots$
3	$\ldots, p_i - 3, p_i, p_i + 3, \ldots$
$\vdots$	
p_{i-1}	$\ldots, p_i - p_{i-1}, p_i, p_i + p_{i-1}$
p_i	$1, p_{i+1}, \ldots$
p_{i+1}	$p_{i-1}, p_i + p_{i-1} - 1$
p_{i+2}	$2p_i - p_{i+2}, 2p_i$
$\vdots$	

Рис. 5

является графическим изображением $*$-набора из $k = p_i + p_{i+1} - 1$ последовательных чисел. При $p_{i+2} \le 2p_i - 1$ аналогичным свойством обладает и рисунок 6. Таким образом, рисунки 5 и 6 являются графическими изображениями $*$-наборов из k последовательных чисел при $p_{i+2} \le 2p_i - 1$.

Убедимся в этом. На рисунке 5 в первых $i - 1$ строках правее черты и левее p_i находятся все числа $l \le p_i - 2$. В самом деле, поскольку $p_i - l < p_i$, число $p_i - l$ *заведомо делится* на одно

2	$\ldots, p_{i+1} - 2, p_{i+1}, p_{i+1} + 2, \ldots$
3	$\ldots, p_{i+1} - 3, p_{i+1}, p_{i+1} + 3, \ldots$
$\vdots$	
p_{i-1}	$\ldots, p_{i+1} - p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+1} + p_{i-1}, \ldots$
p_i	$\ldots, p_{i+1} - 1, p_{i+1} + p_i - 1, \ldots$
p_{i+1}	$1, p_{i+1} + 1$
p_{i+2}	$p_{i+1} - p_i, p_{i+1} + p_{i+2} - p_i$
$\vdots$	

Рис. 6

из простых чисел, *меньших* p_i, и, следовательно, принадлежит одной из прогрессий, стоящих над i-й строчкой таблицы.

Аналогично, числа l, *большие* $p_i + 1$ и не превосходящие $p_i + p_{i+1} - 2$, кроме, может быть, числа $2p_i$, находятся в первых $i - 1$ строчках правее числа p_i. Строчки с номерами i, $i + 1$ обеспечивают наличие общего простого делителя у чисел с номерами 1 и $p_i + 1$, p_{i-1} и $p_i + p_{i+1} - 1$, а при $2p_i > p_{i+2}$ у чисел с номерами $2p_i$ и $2p_i - p_{i+2}$.

Таким образом, с помощью рисунка 5 и китайской теоремы об остатках мы можем получить $*$-набор длины $p_i + p_{i+1} - 1$, если $2p_i > p_{i+2}$.

При $p_{i+2} \le 2p_i - 1$ таким же свойством обладает и рисунок 6 для $k = p_{i+1} + p_{i+2} - 1$.

Упражнение 6. Убедитесь в этом самостоятельно.

Для каждого k, принадлежащего отрезку $[p_{i+1} + p_i - 1, p_{i+1} + p_{i+2} - 1]$, на основе рисунка 6 возможно построение $*$-набора длины k. Если $k = p_{i+1} + p_i$, рисунок 6 необходимо дополнить строчкой

$$p_{i+3} | p_{i+1} + p_i - p_{i+3}, p_{i+1} + p_i,$$

а при $k = p_{i+1} + p_{i+1} = 2p_{i+1}$ добавить также строчку

$$p_{i+1} | 2p_{i+1} - p_{i+4}, 2p_{i+1}.$$

Нетрудно видеть, что приведенные операции возможны при $p_{i+1} + p_i > p_{i+3}$ и $2p_{i+1} > p_{i+4}$. Очевидно, что оба неравенства справедливы, в частности, если между p_i и $2p_i$ и p_{i+1} и $2p_{i+1}$ находится не менее *трех* простых чисел. Следовательно, в этом случае для каждого числа k, принадлежащего отрезку $[p_{i+1} + p_i - 1, p_{i+1} + p_{i+2} - 1]$, можно простроить $*$-набор из k чисел. Аналогично получим, что если между p_{i+2} и $2p_{i+2}$ находится не менее трех простых чисел, то и для любого k, принадлежащего $[p_{i+1} + p_{i+2} - 1, p_{i+2} + p_{i+3} - 1]$, можно построить $*$-набор длины k. Следовательно, *если для каждого простого числа p, начиная с p_i, между p и $2p$ находится не менее трех простых чисел, то для любого $k \ge p_i + p_{i+1} - 1$ можно построить $*$-набор длины k.*

Постулат Бертрана

В 1845 году французский математик Ж.Бертран высказал предположение, что между n и $2n$ при $n \ge 2$ *находится, по крайней мере, одно простое число.* Это предположение получило название *постулата Бертрана.*

Доказал постулат Бертрана выдающийся русский математик П.Л.Чебышёв. Более того, он показал, что число $\pi(N)$ простых чисел, не превосходящих N, имеет порядок $N/\ln N$; эта замечательная теорема стала пер-

(Продолжение см. на с. 52)

Потенциал электростатического поля

В.МОЖАЕВ

Для описания электростатического поля наряду с его силовой характеристикой — напряженностью электрического поля $\vec{E}$ — вводят энергетическую характеристику — потенциал поля φ. В отличие от напряженности, электростатический потенциал является скалярной величиной и равен отношению потенциальной энергии взаимодействия пробного точечного заряда с полем к величине этого заряда. Потенциальная энергия заряда, помещенного в электростатическое поле, численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы переместить этот заряд от выбранного нулевого уровня потенциальной энергии в данную точку пространства. Значение потенциальной энергии, а следовательно и потенциала, в данной точке зависит от выбора нулевого уровня отсчета. Физический смысл имеет не сам потенциал в точке, а его изменение в пространстве (разность потенциалов), которое не зависит от выбора нулевого уровня отсчета потенциала.

На практике электростатическое поле можно характеризовать только одной функцией — электростатическим потенциалом, поскольку напряженность электростатического поля однозначно связана с потенциалом. В случае сферически симметричного электрического поля, когда напряженность электрического поля зависит только от расстояния r, эта связь имеет вид

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

где производная $\frac{d\varphi}{dr}$ (возможно, для читателя более привычно обозначение $\varphi'(r)$) выражает быстроту приращения потенциала в данном направлении. Аналогичные соотношения можно записать для проекций вектора напряженности в декартовой системе координат:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

(или, в иных обозначениях, $E_x = -\varphi'(x)$, $E_y = -\varphi'(y)$, $E_z = -\varphi'(z)$; при дифференцировании по одной координате две остальные в выражении $\varphi(x, y, z)$ надо считать постоянными).

Теперь перейдем к разбору конкретных примеров расчета потенциала электростатического поля с известным распределением напряженности поля и наоборот — расчета $\vec{E}$ по известному распределению φ.

Задача 1. *Найдите распределение потенциала между пластинами уединенного заряженного плоского конденсатора. Заряд на пластинах площадью S равен Q, а расстояние между пластинами d. Краевыми эффектами пренебречь. За нулевой уровень отсчета принять бесконечность.*

Для расчета потенциала выберем систему координат, изображенную на рисунке 1, с началом координат в центре

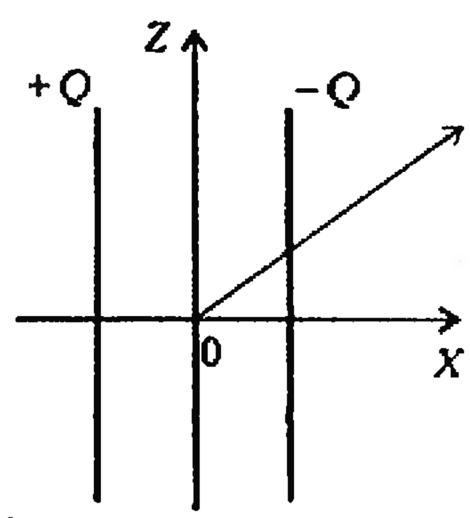


Рис. 1

конденсатора. В области $-d/2 \le x \le d/2$ электростатическое поле однородно и вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси X, поэтому

$$E_x = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},\ E_y = 0,\ E_z = 0.$$

Используя связь между приращением потенциала и напряженностью электрического поля, можно записать

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Решение того уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{Qx}{\varepsilon_0 S} + C_1,$$

где C_1 — некоторая константа. Для ее нахождения воспользуемся тем, что плоскость $x = 0$ является эквипотенциальной поверхностью с потенциалом $\varphi = 0$. Действительно, силовые линии электрического поля плоского конденсатора в любой точке, включая и бесконечно удаленные точки, перпендикулярны плоскости $x = 0$. Поэтому при перемещении пробного заряда вдоль этой плоскости работа не совершается и потенциал всех точек этой плоскости $\varphi = 0$. Из условия, что при $x = 0$ $\varphi = 0$ следует, что $C_1 = 0$, следовательно,

$$\varphi(x) = -\frac{Qx}{\varepsilon_0 S}.$$

Поскольку $E_y = E_z = 0$, распределение потенциала не зависит от y и z, и плоскости $x = \text{const}$ (при $-d/2 \le x \le d/2$) являются эквипотенциальными поверхностями с потенциалом, равным значению потенциала при данном значении x. Распределение потенциала между пластинами центральной части плоского конденсатора изображено на рисунке 2.

Следует отметить, что для пластин конечного размера (т.е. для реальных конденсаторов) все эквипотенциальные

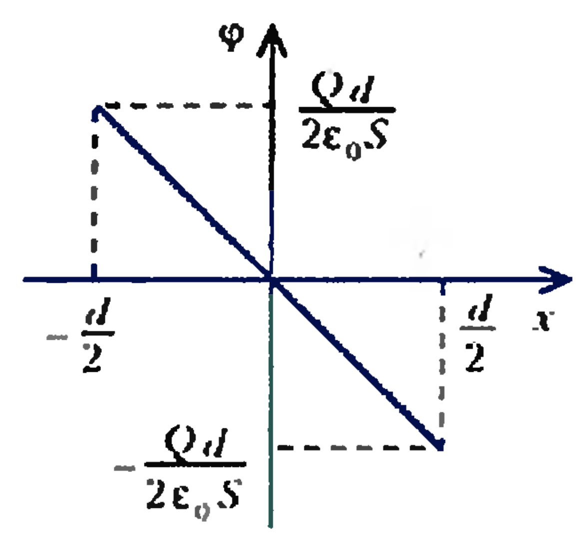


Рис. 2

поверхности $\varphi \ne 0$ принципиально отличаются от поверхности нулевого потенциала — эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала всегда является плоскость ($x = 0$), а эквипотенциальными поверхностями не нулевого потенциала являются сложные замкнутые поверхности, которые только вдали от краев пластин можно считать плоскостями ($x = \text{const}$).

(В качестве самостоятельного упражнения нарисуйте: 1) два аналогичных распределения при нулевом уровне потенциала на положительно заряженной пластине и на отрицательно заряженной; 2) качественное распределение $\varphi(x)$ для реального конденсатора вблизи края пластин; 3) качественное распределение $\varphi(x)$ вне пластин конденсатора.)

Задача 2. *Шар радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью заряда* ρ. *Вычислите распределение*

потенциала внутри и вне шара. За нулевой уровень отсчета потенциала принять бесконечность.

Сначала рассмотрим область пространства вне шара: $R \le r \le \infty$, где r — расстояние от центра шара до выбранной точки пространства. В этой области заряженный шар создает точно такое же электрическое поле, как и точечный заряд, помещенный в центр шара.[1] Поэтому напряженность поля на расстоянии r от шара равна

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(4\pi R^3/3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Приращение потенциала для данного случая можно записать так:

$$d\varphi = -E(r)dr,$$

где dr — малое изменение расстояния r. Просуммируем обе части данного уравнения:

$$\int d\varphi = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2}.$$

После интегрирования получим

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1.$$

Для определения константы C_1 используем граничное условие: при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$. Отсюда следует, что $C_1 = 0$, следовательно, распределение потенциала в области $R \le r \le \infty$ имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}.$$

Теперь рассмотрим область пространства внутри шара: $0 \le r \le R$. В этом случае напряженность электрического поля определяется только зарядом внутри шара радиусом r и равна

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Тогда

$$\int d\varphi = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r dr, \quad \varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_2.$$

Для определения константы C_2 воспользуемся граничным условием: при $r = R$ $\varphi = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$ — это значение потенциала находится из полученного выше распределения. Отсюда получим, что $C_2 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$. Окончательное выражение для распределения потенциала в области $0 \le r \le R$ имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right).$$

График зависимости $\varphi(r)$ при $0 \le r \le \infty$ изображен на рисунке 3.

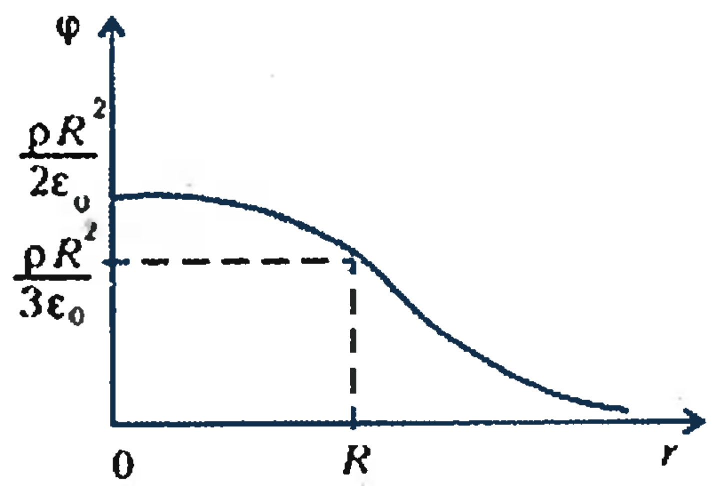


Рис. 3

Задача 3. *Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского вакуумного диода при нулевой разности потенциалов между катодом и анодом устанавливается распределение потенциала, показанное на рисунке 4. Найдите распределение напряженности электрического поля между катодом и анодом.*

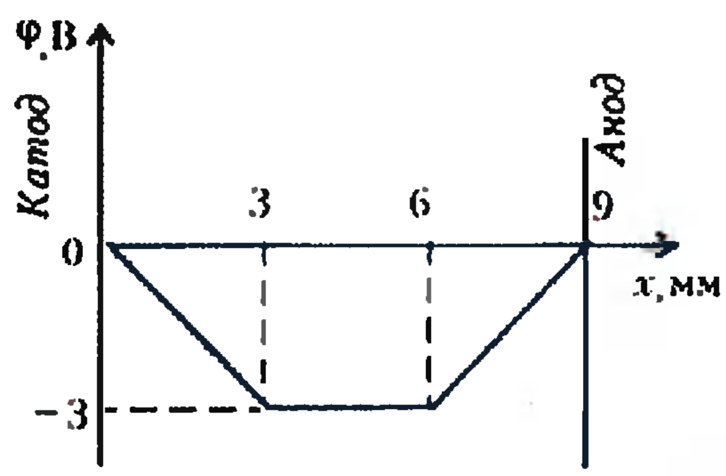


Рис. 4

Сначала запишем распределение потенциала $\varphi(x)$ в аналитическом виде (см. рис.4):

при $0 \le x \le 3\cdot10^{-3}$ $\varphi(x) = -10^3 x$,
при $3\cdot10^{-3} \le x \le 6\cdot10^{-3}$ $\varphi(x) = -3$,
при $6\cdot10^{-3} \le x \le 9\cdot10^{-3}$ $\varphi(x) = -9 + 10^3 x$.

В этих соотношениях потенциал выражен в вольтах, а координата x — в метрах.

Используя связь между напряженностью электрического поля E_x и потенциалом ($E_x = -d\varphi/dx$), получим

при $0 \le x \le 3\cdot10^{-3}$ $E(x) = 10^3$,
при $3\cdot10^{-3} \le x \le 6\cdot10^{-3}$ $E(x) = 0$,
при $6\cdot10^{-3} \le x \le 9\cdot10^{-3}$ $E(x) = -10^3$.

Здесь напряженность выражена в вольтах на метр.

Распределение $E(x)$ между катодом и анодом изображено на рисунке 5.

Реальное распределение потенциала в плоском диоде, конечно, не имеет изломов — это гладкая кривая параболического вида. И, естественно, рас-

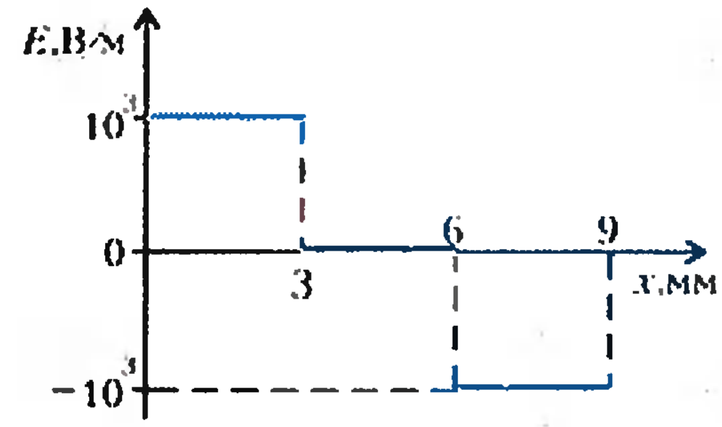


Рис. 5

пределение напряженности не имеет скачков (разрывов).

(Кстати, а что означают скачки на полученной нами зависимости $E(x)$? Попробуйте нарисовать качественное распределение объемного заряда в межэлектродном пространстве диода.)

Задача 4. *Проводящий незаряженный шар радиусом R расположен в поле точечного заряда Q, находящегося на расстоянии L от центра шара. Определите потенциал шара. За нулевой уровень отсчета потенциала принять бесконечность.*

Проводящий шар существенным образом изменяет структуру электрического поля точечного заряда (особенно в окрестности шара). Свободные заряды шара (электроны проводимости) перераспределяются, и на поверхности шара возникает такое распределение поверхностных зарядов (рис.6), чтобы суммарное поле внутри шара (поле точечного заряда Q и поле поверхностных зарядов шара) было равно нулю. Именно условие отсутствия электростатического поля в изолированных проводниках лежит в основе явления электростатической индукции — наведения поверхностных зарядов на проводниках во внешнем электрическом поле. (Поскольку электрическое поле внутри шара равно нулю, можно удалить внутреннюю часть шара и оставить тонкую сферическую оболочку. Очевидно, что это никак не повлияет на пространственное распределение электрического поля и на распределение индуцированных зарядов по поверхности шара. Поэтому задачи о нахождении потенциала проводящего шара или сферы абсолютно эквивалентны.)

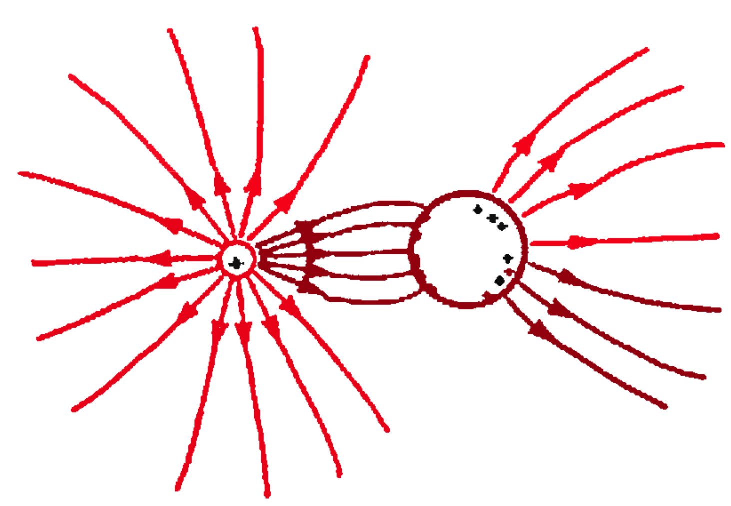


Рис. 6

---

[1] *Подробнее об электрическом поле заряженного шара можно прочитать, например, в статье Л.Асламазова «Напряженность, напряжение, потенциал» в «Приложении к журналу «Квант» №5/94. (Прим. ред.)*

Для решения задачи воспользуемся одним из фундаментальных свойств электростатического поля — принципом суперпозиции. В нашем случае электрическое поле во всем пространстве будет являться суперпозицией полей, создаваемых точечным зарядом и индуцированными поверхностными зарядами на шаре. Найдем сначала потенциал в центре шара φ_0, который определяется алгебраической суммой потенциалов поля точечного заряда Q и поля индуцированных зарядов с поверхностной плотностью $\sigma(r)$:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \Delta S_i}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

где ΔS_i — малый элемент поверхности шара, а σ_i — плотность его заряда. В числителе второго слагаемого стоит суммарный поверхностный заряд шара, но шар не заряжен, поэтому это слагаемое равно нулю и, следовательно, потенциал в центре шара равен

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}.$$

Поскольку весь объем шара является эквипотенциальным, потенциал шара равен потенциалу его центра:

$$\varphi = \varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}.$$

Мы получили, на первый взгляд, неожиданный результат: потенциал шара в поле точечного заряда не зависит от радиуса шара. А на что же влияет размер шара? Оказывается, на величину и пространственное распределение электрического поля вне шара. Самое забавное заключается в том, что мы, не зная электрического поля снаружи шара, смогли найти его потенциал.

(Задача о нахождении распределения поля вне шара выходит за рамки школьной программы, но она имеет строгое решение. Для любознательных сообщим, что данное поле будет эквивалентно полю, создаваемому тремя точечными зарядами: исходным зарядом Q, зарядом величиной RQ/L, находящимся в центре шара, и зарядом, равным заряду в центре шара, но противоположным по знаку и расположенным на прямой, соединяющей центр шара с зарядом Q, на расстоянии $x = R^2/L$ от центра шара.[2] Предлагаем проверить самостоятельно, что для системы этих трех зарядов сферическая поверхность радиусом R является эквипотенциальной поверхностью с потенциалом $Q/(4\pi\varepsilon_0 L)$.)

[2] *Подробнее об этом можно прочитать, например, в статье А.Черноуцана «Метод электростатических изображений» в «Кванте» №1 за 1996 год. (Прим. ред.)*

Задача 5. *Металлический шар радиусом R_1, заряженный до потенциала φ_1, симметрично окружен тонкостенной проводящей незаряженной сферой радиусом R_2 (рис.7). Чему будет равен потенциал шара в двух случаях: 1) если заземлить сферу; 2) если закоротить шар и сферу (соединить проводником)?*

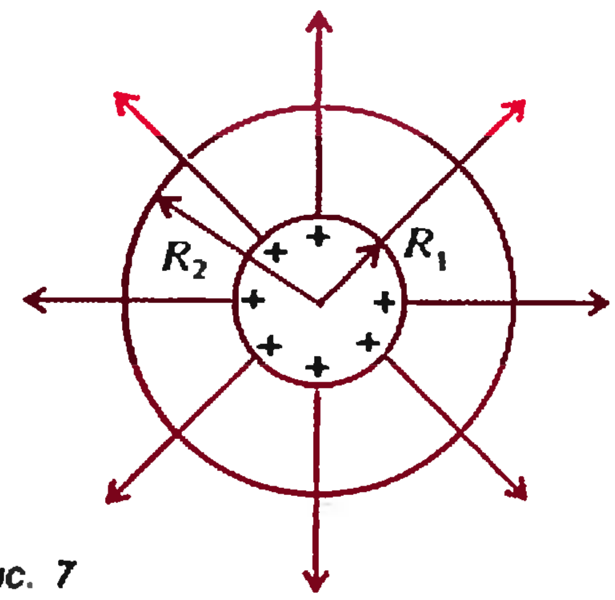


Рис. 7

Сначала поговорим немного о физической стороне процесса заземления. С технической точки зрения, заземлить некое проводящее тело означает соединить данное тело и Землю хорошим проводником. Обычно для этого в Землю закапывают достаточно большой металлический лист — чем больше поверхность соприкосновения металла и Земли, тем лучше. С физической точки зрения, заземлить означает выровнять потенциалы Земли и проводящего тела. Для справки: поверхностный заряд Земли отрицательный, напряженность электрического поля вблизи поверхности Земли составляет приблизительно 100 В/м, а потенциал Земли относительно бесконечности равен 400000 В. Возникает вопрос: а какой потенциал имеет незаряженный проводник (не заземленный) у поверхности Земли? Однозначно ответить на этот вопрос нельзя, все зависит от конкретной ситуации: наличия окружающих проводящих предметов, высоты от поверхности Земли, проводящих свойств окружающего воздуха и т.д. Но когда речь идет о задачах, подобной этой, считается, что потенциал незаряженного проводника равен потенциалу Земли. Поэтому, если на проводнике имеется заряд, то такой проводник приобретает дополнительный потенциал, вызванный собственным электрическим полем. При постоянном потенциале Земли значения дополнительного потенциала заряженного тела, отсчитанные от бесконечности или от поверхности Земли, совпадают, а потенциал Земли в этом случае можно считать равным нулю.

Теперь разберем первый случай нашей задачи, когда сфера заземлена, т.е. потенциал сферы стал равным нулю. Поскольку потенциал шара до заземления был равен φ_1, на шаре находился заряд $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1$. Обозначим через Q_2 заряд, который перейдет с Земли на сферу после заземления, и запишем условие равенства нулю потенциала сферы:

$$\varphi_1\frac{R_1}{R_2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 0.$$

Отсюда

$$Q_2 = -4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1 = -Q_1.$$

Это означает, что электрическое поле вне оболочки будет отсутствовать, а шар и сфера будут представлять из себя заряженный сферический конденсатор (рис.8). Потенциал шара, очевидно, будет равен

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \varphi_1 - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \varphi_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Во втором случае, когда шар и оболочка закорочены, их потенциалы будут равны. Легко сообразить, что равенство потенциалов означает отсутствие электрического поля между шаром и сферой, следовательно, заряд шара равен нулю, а заряд сферы равен заряду шара. Покажем это. Пусть после соединения на сферу перейдет заряд Q_3, тогда на шаре останется заряд $Q_1 - Q_3$. Условие равенства потенциалов шара и сферы можно записать в виде

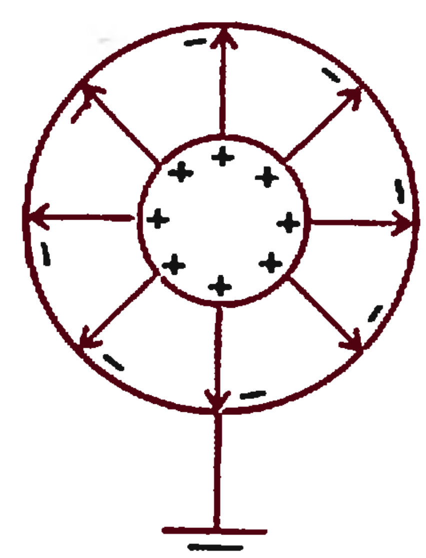


Рис. 8

$$\frac{Q_1 - Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1 - Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Отсюда следует, что $(Q_1 - Q_2)(R_2 - R_1) = 0$. Поскольку $(R_2 - R_1) \neq 0$, получаем $Q_1 = Q_3$. Таким образом, потенциал

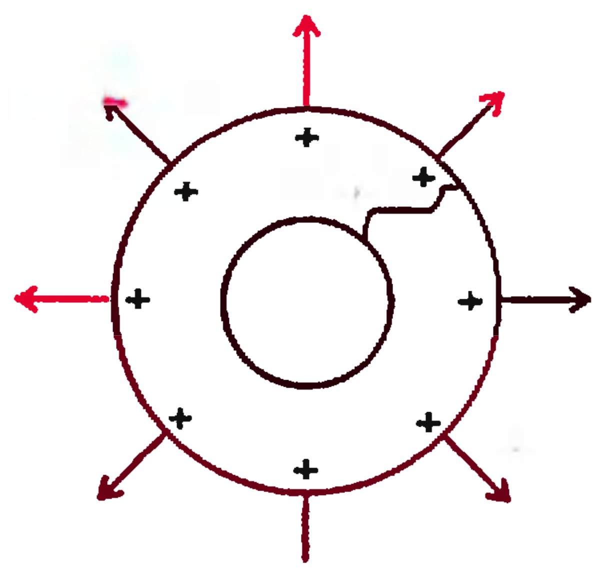


Рис. 9

шара

$$\varphi_3 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \varphi_1 \frac{R_1}{R_2}.$$

Электрическое поле системы шар – сфера для данного случая изображено на рисунке 9.

Упражнения

1. Найдите распределение потенциала для проводящего заряженного шара радиусом R_1, окруженного толстостенной незаряженной проводящей сферой с радиусами R_2 (внутренний) и R_3 (внешний). Заряд шара Q. За нулевой уровень потенциала принять бесконечность.

2. Внутри плоского заряженного конденсатора, расстояние между пластинами которого d, на расстоянии a ($a < d/2$) от положительно заряженной пластины расположен точечный заряд q. Заряд конденсатора Q, а площадь пластин S. Какую работу необходимо совершить, чтобы переместить заряд q на бесконечность?

3. Распределение потенциала между электродами газоразрядной трубки при

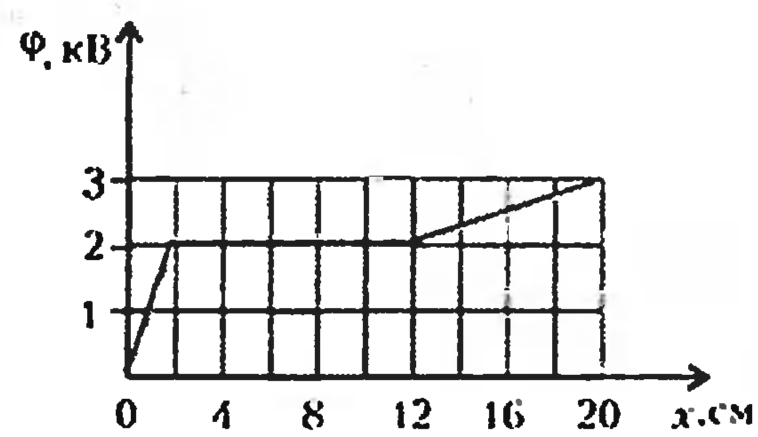


Рис. 10

тлеющем разряде изображено на рисунке 10. Найдите распределение напряженности электрического поля между электродами.

4. Незаряженный проводящий шар радиусом R расположен в поле точечного заряда q (рис.11). Расстояние между зарядом и центром шара L. Шар через гальванометр G и ключ K соединен с Землей. Какой заряд протечет через гальванометр после замыкания ключа?

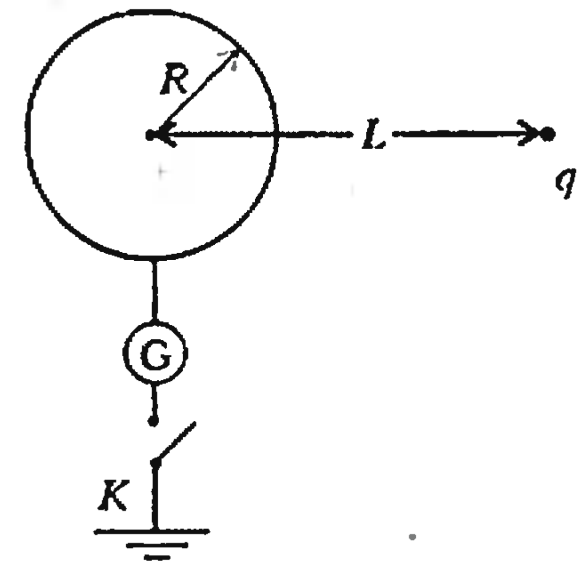


Рис. 11

НАША ОБЛОЖКА

МЕХАНИЧЕСКИЙ «СТРОБОСКОП»

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Объяснение наблюдаемому явлению должно состоять из двух частей. Первая призвана описать, *как* движется трубочка, точнее – как она *должна* двигаться, чтобы мы видели именно то, что видим. Вторая часть должна объяснить, *почему* трубочка именно так движется. Но – все по порядку.

Выскакивая из-под пальца, трубочка приобретает сразу три движения: одно поступательное (трубочка некоторое время движется по столу, удаляясь от руки) и два вращательных – вокруг вертикальной оси, проходящей через центр трубочки, и вокруг оси трубочки. Спустя некоторое время поступательное движение прекращается, и трубочка только вращается на месте. К этому моменту устанавливается вполне определенное соотношение между угловыми скоростями двух вращательных движений: $\omega_2 \approx 5\omega_1$, которое напрямую связано с отношением длины трубочки к ее диаметру (которое в данном случае равно пяти): $l \approx 5d$. Почему это происходит – вопрос довольно сложного рассмотрения в рамках динамики, где решающую роль играет влияние сил трения. Мы примем это утверждение без дополнительных обсуждений как установленный экспериментальный факт, с помощью которого постараемся объяснить, почему мы видим 5 неподвижных точек одного цвета.

За время одного оборота вокруг вертикальной оси трубочка успевает пять раз повернуться вокруг своей центральной оси. Значит, за это время та сторона трубочки, на которую нанесены цветные точки, пять раз окажется наверху. Так как при каждом последующем обороте эти пять положений будут практически в тех же самых местах, то, благодаря инертности зрения, цветные пятнышки, которые мы видим в этих положениях, будут сливаться в пять неподвижных точек. (Именно такой эффект достигается при стробоскопическом освещении вращающегося круга: если светлый круг с нанесенной на его краю темной меткой в темноте привести во вращение и освещать короткими вспышками с частотой, кратной частоте вращения, то из-за инертности зрения мы увидим светлый круг с несколькими неподвижными метками.)

Но почему же мы видим точки только одного цвета, ведь сверху одновременно оказываются оба пятнышка? Объяснение кроется также в инертности зрения. В тот момент, когда оба пятна оказываются наверху, скорость одного из них равна разности скоростей v_1 и v_2, которые оно имеет за счет участия в двух вращательных движениях, а скорость другого – сумме этих скоростей. Благодаря соотношению между угловыми скоростями, v_1 и v_2 почти равны друг другу: $v_1 = \omega_1 l/2$, $v_2 = \omega_2 d/2$. В результате одно из пятен (то, которое в момент «запуска» находилось под пальцем) оказывается практически неподвижным, а другое движется с приличной скоростью. Благодаря инертности зрения, мы видим только неподвижное пятно, а другое пятно как бы не успеваем заметить.

Итак, мы установили, как должна двигаться трубочка, чтобы были видны пять неподвижных точек одного цвета. Главное – в течение заметного времени должно поддерживаться вполне определенное отношение угловых скоростей. Имеющееся у нас объяснение этого факта кажется нам слишком громоздким и сложным, и мы решили не приводить его здесь. Вместо этого мы призываем читателей попытаться найти свое объяснение тому, как устанавливается необходимое соотношение между угловыми скоростями и как оно поддерживается, и прислать его нам. (Один совет: не пытайтесь рассуждать чисто теоретически (умозрительно), обязательно изготовьте хотя бы одну «действующую модель» трубочки и понаблюдайте за ее движением.) Самое удачное объяснение будет опубликовано в журнале.

С.Кротов, А.Черноуцан

Варианты вступительных экзаменов 1996 года

Новосибирский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты механико-математический и экономический)

1. Купил Роман раков, вчера — мелких, по цене 510 рублей за штуку, а сегодня — по 990, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25 200 рублей, из них переплаты из-за отсутствия сдачи в сумме составили от 160 до 200 рублей. Сколько раков купил Роман вчера и сколько сегодня?

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=\sqrt{1+8\sin x}.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписанная окружность касается боковой стороны BC в точке Q, а отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AC=12$, $PQ=5$.

4. Найдите все решения неравенства

$$\left(4-x^{\log_2 x}\right)\left(\log_2\frac{3x+3}{16}+\log_{3x+3}16\right)\geq 0$$

и укажите наименьшее из них.

5. В пирамиде $ABCD$ ребро BD перпендикулярно ребрам AB и DC. Найдите угол между ребрами AB и DC, если известно, что $BD:DC:PQ:AB=3:4:5:6$, где P и Q — середины ребер DC и AB соответственно.

Вариант 2

(факультет естественных наук)

1. У Фрола было не менее 6 кусков мыла, а у Прокла — не более 30 штук шил. Столковались они считать каждое шило за 8 700 рублей, а кусок мыла — за 4 500, да и поменялись. Прокл отдал Фролу все свои шила и забрал у него все мыло. Определите, сколько мыла выменял Прокл, если известно, что Фрол доплатил Проклу 3 350 рублей и остался ему должен не более 500 рублей.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{2}\sin x-\left(\sqrt{6}+2\right)\cos x}=2\sin\frac{x}{2}.$$

3. Равнобедренная трапеция $ABCD$ с периметром 12 описана около окружности с центром O. Найдите площадь трапеции, если известно, что $AO=2$.

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{(2x-2)\left(x^2-7x+12\right)}}{x-4}\geq 2x-6.$$

5. В основании пирамиды с вершиной S лежит ромб $ABCD$ с диагональю $BD=6$ и сторонами, равными 5. Перпендикуляр, опущенный из вершины S на основание, пересекает диагональ AC в точке H, причем $CH:AH=1:7$. Найдите объем пирамиды, если известно, что существует сфера, касающаяся ребер основания, а отрезок SH касается этой сферы в точке S.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Посадил Буратино 1 сольдо на поле Чудес, и выросло из него волшебное дерево, а на нем монеты созрели. Стал Буратино трясти дерево и за три попытки все монеты стряхнул. Во второй попытке упало на 80 монет меньше, чем в первой, но на 16 больше, чем в третьей. Какой урожай дало дерево, если известно, что числа, обратные к количествам монет, упавших в каждой попытке, составляют арифметическую прогрессию?

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB=7$, $AC=5$, $BC<5$, $\angle ADC=135^\circ$. Найдите величину угла ADB.

3. Найдите все такие числа a и b, что парабола $y=ax^2+bx+2$ касается прямых $y=3x-6$ и $y=-3x$.

4. Решите неравенство

$$\log_x\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-7\sqrt{x}\right)+\log_{6-7x}\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-7\sqrt{x}\right)\geq 0$$

5. Основания усеченной пирамиды параллельны между собой и являются правильными треугольниками. Меньшее из оснований лежит в диаметральной плоскости сферы, касающейся другого основания и продолжений всех остальных граней пирамиды. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостями оснований один и тот же угол, равный 60°. Найдите отношение периметров оснований.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. В цилиндре, закрытом поршнем, находится газ объемом V_0. Сдвинув поршень, объем газа уменьшили на величину ΔV. При этом давление оказалось в n раз больше, чем в случае, когда начальный объем увеличили на ΔV. Температура поддерживается постоянной. Найдите ΔV.

2. К одному концу нити, перекинутой через неподвижный блок, присоединен груз массой m, а к другому концу через пружину присоединен груз массой M. Груз массой M лежит на горизонтальном полу, а груз массой m поддерживают так, что пружина не растянута. В некоторый момент груз массой m отпускают. При каком минимальном значении m груз массой M оторвется от пола?

3. Две одинаковые большие металлические плоскопараллельные пластины, сложенные вместе, находятся в перпендикулярном их поверхности однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E}$. Какая сила будет действовать на каждую из пластин, если их слегка развести, сохраняя перпендикулярность полю? Площадь каждой пластины S.

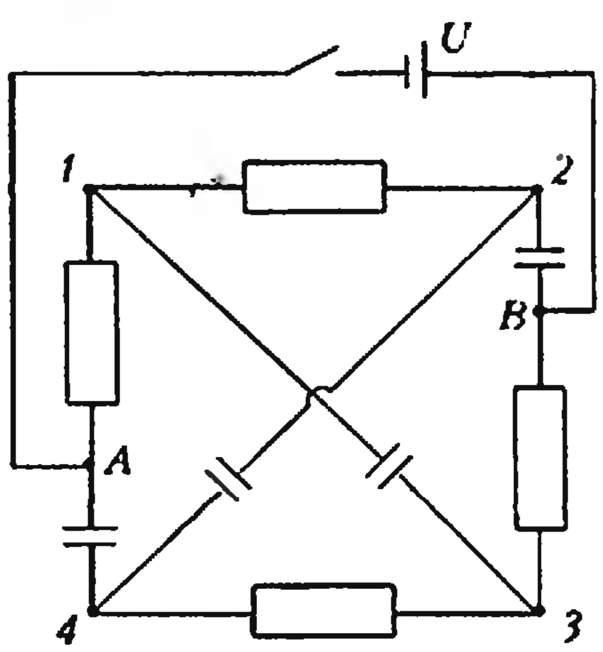
4. Оцените, при каком внешнем давлении пуля не вылетит из ствола ружья после выстрела.

5. Бутылку заполнили водой наполовину. Плотно закрыв горлышко пальцем, ее перевернули, опустили в тарелку с водой так, чтобы горлышко бутылки оказалось под уровнем воды в тарелке, и палец убрали. Объясните, почему вода удерживается в бутылке.

Вариант 2

1. Пучок параллельных световых лучей падает по нормали на плоскую грань стеклянной призмы с показателем преломления n и выходит из призмы под углом θ к первоначальному направлению падения. Угол α при вершине призмы так мал, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. Найдите этот малый угол.

2. Какой заряд пройдет через источник питания с постоянным напряжением U после его подключения к точкам A и B электрической цепи, изображенной на рисунке? Емкость каждого конденсатора равна C.



3. Колесо радиусом R катится по дороге без проскальзывания с ускорением a. В некоторый момент времени прилипший к ободу комочек грязи массой m находится в передней точке колеса. Найдите равнодействующую сил, действующих на этот комок, если скорость оси колеса в этот момент равна v.

4. Вы надежно закрыли отверстие велосипедного насоса и изо всех сил быстро сжали в нем воздух. Оцените максимальную температуру воздуха в насосе, которую можно получить в этом случае.

5. В плоскую кювету с жидкостью опускают пробирку, в которой находится металлическое колечко. При освещении системы в ее изображении на экране колечка в пробирке практически не видно. В пробирку наливают ту же жидкость, что была в кювете. При этом на экране появляется отчетливое изображение колечка. Объясните явление.

Публикацию подготовили
А.Больбот, Г.Меледин, Г.Шустов

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты математико-механический и прикладной математики – процессов управления, дневное отделение)

1. Нарисуйте график функции

$$y = \log_4\left(x^2 - 4x + 5 - |2x - 4|\right).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}} = \frac{x - 3\sqrt{x-2} + 2}{9}.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = 3\sin x - \operatorname{tg} x.$$

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AN и CK. Известно, что площади треугольников AKC и ANC равны. Докажите, что $AB = BC$.

5. Стенки сосуда образованы точками параболы $y = 2x^2$ при ее вращении вокруг ее оси симметрии. В вертикально стоящий сосуд бросили шар объемом 0,1. Коснется ли шар дна сосуда?

Вариант 2

(экономический факультет (математические методы в экономике), дневное отделение)

1. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2-1}{x+y} = \left|1 - \frac{x}{y}\right|.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3x^2+5x-2} \le 2 + x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{5+\frac{x}{2}} \sin x = \log_{9+8x-x^2} \sin x.$$

4. Вершина O равностороннего треугольника ABO лежит внутри треугольника ABC. Найдите OC, если известно, что $AB = 1$, а площади треугольников AOC и BCO равны, соответственно, 3 и 5.

5. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, и все боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами. Радиус сферы, описанной вокруг данной пирамиды, равен 7. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 3

(факультеты психологический и экономический, вечернее отделение)

1. Арифметическая прогрессия состоит из четырех различных чисел. Известно, что если заменить в ней третье число на единицу, то получится арифметическая прогрессия. Найдите исходную прогрессию.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2+x+3} = 2x^2 + x - 3.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x + 0{,}5}{\cos x} = \sin x + \cos x.$$

4. Постройте график функции

$$y = \frac{1+\log_2\left(x^2+x\right)}{1+\log_{2x}(x+1)}.$$

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковые грани наклонены к основанию под углом α. Внутри пирамиды помещены два одинаковых касающихся друг друга шара радиуса R, каждый из которых касается также основания и двух боковых граней данной пирамиды (шары касаются разных граней). Выразите R через a и α.

Публикацию подготовили
Н.Нецветаев, А.Орлов, Ю.Чурин

Государственная академия нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение и вычислите при $x = 2$, $y = 0{,}134$

$$\left(\frac{2\sqrt{5}xy}{x^2y^2-5} + \frac{xy-\sqrt{5}}{2xy+2\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{2xy}{xy+\sqrt{5}} - \frac{xy}{xy-\sqrt{5}} + 4{,}1.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{0{,}5\left(x^2-5x+8\right)}=x-3.$$

3. Произведение 6-го и 46-го членов геометрической прогрессии равно 0,81. Найдите 26-й член этой прогрессии, если известно, что он положителен.

4. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства

$$|x+1{,}5|>7.$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^x-17}{5^x-17}>\frac{3\sqrt{3}}{125}.$$

6. Вычислите

$$\log_{3,8}10\cdot\lg\left(\sqrt[5]{3{,}8}\right).$$

7. Вычислите

$$\frac{2\sin^2 70°-1}{2\operatorname{ctg}115°\cos^2 155°}.$$

8. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\cos(\pi/3)\sin 2x+\sin(\pi/3)\cos 2x=1/2.$$

9. Найдите наименьшее значение, которое может принимать расстояние между корнями трехчлена

$$y=x^2+(72{,}5-2a)x-a$$

при всевозможных допустимых значениях параметра a.

10. Найдите меньший корень уравнения

$$\frac{x}{18}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}.$$

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведены высота AH и медиана AM. Найдите $\sin\angle BAC$, если отношение площади треугольника AMH к площади треугольника ABC равно 0,1562.

12. В правильной треугольной пирамиде площадь основания равна 100, боковая грань составляет с плоскостью основания угол β, $\sin\beta=0{,}84$. Через вершину основания проведена плоскость перпендикулярно противоположной боковой грани и параллельно противоположной стороне основания. Найдите площадь сечения.

Вариант 2

1. Вычислите

$$\frac{a^6+216}{a^4-6a^2+36}-\frac{a^4-36}{a^2+6}.$$

2. Найдите наименьшее целое положительное число из области определения функции

$$f(x)=\log_4\left(6x^2+13x-15\right).$$

3. Сумма первых семи членов арифметической прогрессии равна 63. Найдите разность прогрессии, если ее первый член равен 3.

4. Решите уравнение

$$|x|-2x-3=0.$$

5. Решите уравнение

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x+6}=\left(\sqrt[5]{17}\right)^{x+6}.$$

6. Вычислите

$$(64)^{\log_8 5\sqrt{5}}.$$

7. Вычислите

$$\frac{3\left(\sin^2 13°+\sin^2 77°\right)}{4\cos^2 30°+7}.$$

8. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\cos 13x+\cos x=5\cos 6x.$$

9. Найдите наименьшее расстояние, на котором может находиться от начала координат вершина параболы

$$y=x^2+\left(\sqrt{2a}\right)x+100{,}25$$

при всевозможных допустимых значениях параметра a.

10. Сколько целых решений имеет неравенство

$$|x|^{x^2+2x-120}<1?$$

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведены биссектриса AL и высота AH. Площадь треугольника ALC равна 1. Найдите площадь треугольника AHC, если $\cos\angle BAC=0{,}1$.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через диагональ основания BD и середину бокового ребра SC проведено сечение. Найдите объем пирамиды, если плоскость сечения образует с плоскостью основания угол φ, $\sin\varphi=0{,}6$, а площадь сечения равна 2,5.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы не указаны, выразите ответ в единицах СИ.

Вариант 1

1. Катер, переправляясь через реку шириной 600 м, двигался перпендикулярно течению реки со скоростью 4 м/с в системе отсчета, связанной с водой. На сколько метров будет снесен катер течением, если скорость течения 1,5 м/с?

2. Машина массой 1,5 т движется со скоростью 72 км/ч по выпуклому мосту, радиус кривизны которого 100 м. С какой силой (в кН) давит машина на мост, проезжая через его середину? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

3. На нити длиной 2,5 м подвешен шар. Какую горизонтальную скорость нужно сообщить шару, чтобы он поднялся до высоты, на которой расположена точка подвеса? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

4. При нагревании газа при постоянном объеме на 1 К давление увеличилось на 0,4%. При какой начальной температуре (в кельвинах) находился газ?

5. Чему равна высота водопада, если температура воды у его основания на 0,05 °С больше, чем у вершины? Считайте, что вся механическая энергия идет на нагревание воды. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), ускорение свободного падения 10 м/с^2.

6. На сколько градусов изменится температура воды в калориметре, если через нагреватель пройдет 300 Кл электричества? Напряжение на нагревателе 210 В, масса воды 5 кг, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К). Теплопотери не учитывать.

7. В однородном магнитном поле с индукцией 0,06 Тл находится проводник, расположенный горизонтально. Линии индукции поля также горизонтальны и перпендикулярны проводнику. Какой ток должен протекать через проводник, чтобы он висел не падая? Масса единицы длины проводника 0,03 кг/м, ускорение свободного падения 10 м/с^2.

8. Монохроматический свет с частотой $1{,}5\cdot10^{15}$ Гц распространяется в пластинке, прозрачной для этого света и имеющей показатель преломления 1,25. Чему равна длина волны (в нм) этого света в пластинке? Скорость света в вакууме $3\cdot10^8$ м/с.

9. Человек захотел спуститься по веревочной лестнице из свободно висящего аэростата массой 400 кг. Какой минимальной длины лестницу он должен привязать к гондоле аэростата, чтобы, ступая на последнюю ступеньку, коснуться земли? Масса человека 80 кг, расстояние от земли до аэростата в начальный момент времени 15 м.

10. Цилиндр плавает в вертикальном положении в сосуде с водой. В сосуд подливают более легкую жидкость слоем толщиной 20 см так, что она не

доходит до верха цилиндра. При этом высота части цилиндра, находящейся в воде, уменьшается на 16 см. Чему равна плотность легкой жидкости? Плотность воды 1000 кг/м^3.

11. Тысяча одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены до одинакового потенциала 0,1 В. Определите потенциал большой шарообразной капли, получившейся в результате слияния малых капель.

12. Через сколько секунд от начала движения точка, совершающая колебания по закону $x = A\sin\omega t$, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний 36 с.

Вариант 2

1. За две секунды движения тело прошло путь 20 м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 3 раза по сравнению с первоначальной. Каково было ускорение тела?

2. По абсолютно гладкой горизонтальной поверхности движется со скоростью 7 м/с ящик с песком массой 4 кг. В песок попадает гиря массой 3 кг, отпущенная с некоторой высоты без начальной скорости. Определите скорость ящика после попадания в него гири.

3. Шар массой 3 кг, имеющий скорость 4 м/с, испытывает абсолютно неупругий удар с покоящимся шаром такой же массы. Сколько тепла выделилось при ударе?

4. При каждом ходе поршневой насос захватывает 20 дм^3 воздуха из атмосферы при нормальных условиях (T_0 = = 273 К, p_0 = 1 атм) и нагнетает его в резервуар объемом 2 м^3. Температура в резервуаре постоянна и равна 300 К. Сколько ходов должен сделать поршень насоса, чтобы повысить давление в резервуаре от нормального (p_0 = = 1 атм) до 8 атм?

5. Горячее тело, температура которого 70 °С, приведено в соприкосновение с холодным телом с температурой 20 °С. В тепловом равновесии установилась температура 30 °С. Во сколько раз теплоемкость холодного тела больше теплоемкости горячего?

6. За одну минуту через поперечное сечение проводника прошел заряд 180 Кл. При этом первые 20 с сила тока равномерно возрастала от нуля до некоторой величины I, затем 30 с не менялась, а последние 10 с равномерно уменьшалась до нуля. Найдите I.

7. Протон и α-частица влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям поля. Во сколько раз угловая скорость α-частицы меньше угловой скорости протона?

8. На каком расстоянии (в см) от выпуклой линзы с фокусным расстоянием 32 см следует поместить предмет, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в 4 раза?

9. Велосипедист производит поворот радиусом 30 м на наклонном треке. Чему равна максимально допустимая скорость движения, если коэффициент трения 0,5, а тангенс угла наклона трека к горизонту 1/2? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

10. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Площадь сечения одного сосуда в 4 раза больше, чем другого. В широкий сосуд наливают столб воды высотой 102 см. На сколько сантиметров поднимется ртуть в узком сосуде? Плотность ртути 13600 кг/м^3, воды 1000 кг/м^3.

11. Шарик массой 10 г, имеющий заряд 100 мкКл, подвешен на невесомой и нерастяжимой нити длиной 50 см. Он находится в однородном электрическом поле напряженностью 100 В/м, силовые линии которого горизонтальны и направлены справа налево. Шарик отвели влево так, что он оказался на 40 см ниже точки подвеса нити, и отпустили. Найдите силу натяжения нити (в мН) в тот момент, когда шарик проходит нижнюю точку своей траектории. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

12. Пружинный маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Через какое время (в мс) кинетическая энергия колеблющегося тела будет в первый раз равна потенциальной энергии пружины? Период колебаний 200 мс.

Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан

Московский государственный авиационный технологический университет им.К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=-5, \\ x^2y-xy^2=30. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\left(\operatorname{ctg}^2 x+2\right)\sin x=\frac{5}{2}.$$

3. Для изготовления партии в 168 деталей вначале использовался станок устаревшей конструкции. После того, как на нем было изготовлено 48 деталей, работа была продолжена на новом станке, имеющем производительность на 24 детали в час больше. Определите, сколько деталей изготавливалось в час на новом станке, если вся работа была выполнена за 6 часов.

4. Решите уравнение

$$\log_{x-1}\log_5(3x-3)\le 0.$$

5. При каких значениях параметра k уравнение

$$(4k+3)x+\frac{2}{\sqrt{x}}-6=0$$

не имеет решений?

6. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D, а на стороне AB – точка K так, что $BD : DC = 2 : 1$ и $BK : KA = 3 : 1$. Отрезки AD и CK пересекаются в точке E. Найдите отношение площадей треугольника ABC и четырехугольника $KBDE$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=11, \\ x-4y+29=0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\cos 4x+\frac{13}{3}.$$

3. Имеется три сплава алюминия и титана. Если сплавить их в равных количествах, получится сплав, содержащий 10,92 кг титана. Определите процентное содержание алюминия во втором сплаве, если известно, что в третьем сплаве оно в два раза выше, чем в первом.

4. Решите неравенство

$$\log_x\frac{10x-40}{x-3}\ge 1.$$

5. При каких значениях параметра k уравнение

$$x^3-3x^2-9x+k=0$$

имеет один положительный корень?

6. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и медиана CK. Продолжение отрезка KD за точку D пересекает продолжение стороны AC за точку C в точке E. Найдите отношение $AB : AC$, если площадь треугольника ABC равна 15, а площадь треугольника DCE равна 5.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На сколько изменится внутренняя энергия восьми молей одноатомного идеального газа при изобарном нагревании от 350 К до 380 К?

2. Парашютист сразу же после прыжка пролетает расстояние 50 м, на котором сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала. Далее, после раскрытия парашюта, он движется с ускорением 2 $м/с^2$ и достигает земли со скоростью 3 м/с. С какой высоты парашютист прыгал и сколько времени он находился в воздухе?

3. На расстоянии 90 см от поверхности шара радиусом 10 см, несущего положительный заряд с поверхностной плотностью 30 $мкКл/м^2$, находится точечный положительный заряд 7 мкКл. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд на расстояние 50 см по направлению к центру шара?

4. Напряжение на шинах электростанции равно 10 кВ. Расстояние до потребителя 500 км. Станция должна передать потребителю мощность 100 кВт. Потери напряжения в проводах не должны превышать 4%. Вычислите массу медных проводов на участке электростанция – потребитель. Плотность меди 8900 $кг/м^3$, удельное сопротивление $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

5. Небольшой металлический шарик освещается светом с длиной волны 250 нм. Определите, в каких пределах может изменяться импульс, который получает шарик при поглощении одного фотона с последующим вылетом электрона, если красная граница фотоэффекта для этого металла 255 нм.

6. Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. До полной остановки частица проходит путь s = 10 см. Если в среде имеется магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, то при той же начальной скорости она останавливается на расстоянии L = 6 см от точки входа в среду. На каком расстоянии от точки входа остановилась бы частица, если бы поле было в 2 раза меньше?

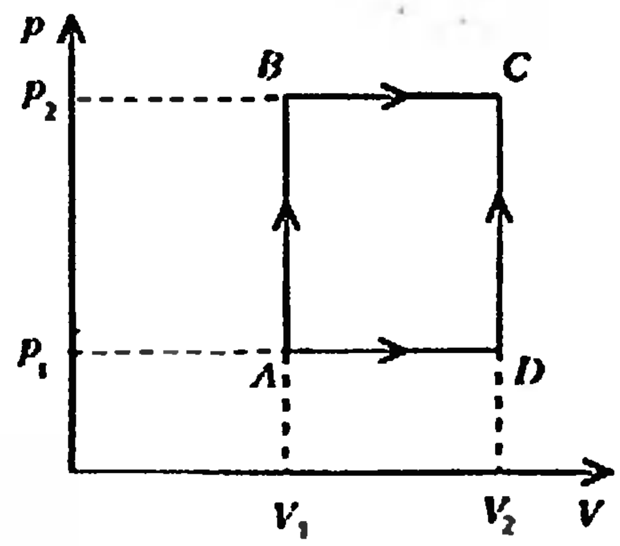
Вариант 2

1. Смещение груза (в см) подвешенного на пружине, в зависимости от времени задается законом $x(t) = 8\cos(10t + \pi/4)$. При этом максимальная кинетическая энергия составляет 0,8 Дж. Найдите жесткость пружины.

2. Точечные заряды 10 нКл и −20 нКл закреплены на расстоянии 1 м друг от друга в воздухе. На каком расстоянии от отрицательного заряда напряженность электрического поля равно нулю?

3. Два груза массами 0,04 кг и 0,01 кг соединены невесомой нитью, переброшенной через неподвижный блок, и расположены над столом на высоте 0,5 м над его поверхностью. В начальный момент грузы покоятся, затем их отпускают. Какое количество теплоты выделится при ударе первого груза о стол? Удар абсолютно неупругий.

4. Если над идеальным газом совершается процесс ABC, то ему сообщается



ся количество теплоты 15,5 кДж. Какое количество теплоты сообщается газу в процессе ADC, если V_1 = 10 л, V_2 = = 20 л, p_1 = 100 кПа, p_2 = = 300 кПа?

5. В однородном магнитном поле с магнитной индукцией 1 мТл начинает падать проводник длиной 0,1 м и массой 10 г, скользящий без трения и без потери контакта по двум вертикальным параллельным шинам. Внизу шины замкнуты резистором сопротивлением 0,5 Ом, параллельно которому включен конденсатор емкостью 400 пФ. Определите максимальную энергию электрического поля, запасенную в конденсаторе. Сопротивлением шин и проводника пренебречь. Линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости, в которой лежат шины.

6. В заднюю стенку башни танка, идущего со скоростью 72 км/ч, ударяется пуля, летевшая горизонтально в том же направлении, что и танк, со скоростью 750 м/с. Определите скорость пули сразу после отскока, если удар абсолютно упругий. Задняя стенка башни танка скошена и составляет угол 30° с вертикалью.

Публикацию подготовили
Т.Медина, Г.Никулин, А.Симонов

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$, $\alpha \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. Известно, что $\log_b a = 7$. Найдите $\log_a(a^2 b)$.

3. Упростите выражение

$$\frac{a-b}{2a+1}\cdot\left(\frac{2a+1}{a+b} - \frac{b(2a+1)}{b^2-a^2}\right) + \frac{b}{a+b}.$$

4. Найдите разность возрастающей арифметической прогрессии, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

5. Разделите число 128 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй как 2:3, вторая к третьей — как 3:5, третья к четвертой — как 5:6.

6. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, сумма длин других сторон равна 6. Найдите площадь треугольника ABC, если косинус угла ACB равен 5/12.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}\cdot(x+3y) = 36,\\ \sqrt{y}\cdot(3x+y) = 28.\end{cases}$$

8. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

9. Найдите неотрицательные значения a, при которых уравнение

$$ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$$

имеет только целые корни.

10. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1-x}{3}} \log_2 \frac{6+x}{3+x} \ge 0.$$

11. Пусть a, b, c — стороны треугольника, площадь которого равна S. Докажите, что

$$S \le \frac{2a^2 + 5b^2 + 5c^2}{24}.$$

12. Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, зато все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$3^{2x+1} = (1/3)^{1+x}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1-3x}{3-x} \le 3.$$

3. Решите уравнение

$$\cos^2(1-2x) = \frac{3}{4}.$$

4. Решите уравнение

$$x+\sqrt{2x+3}=6.$$

5. Из двух пунктов, расстояние между которыми 50 км, одновременно навстречу друг другу отправились велосипедист и пешеход и встретились через 2,5 часа. Если бы велосипедист увеличил свою скорость на 25%, то их встреча состоялась бы на 25 минут раньше. Найдите первоначальные скорости велосипедиста и пешехода.

6. Решите уравнение

$$(3\cdot\log_{27}27x)\cdot\log_3 x=2\cdot(\log_3 x+1).$$

7. Найдите первый член геометрической прогрессии, если ее третий член равен (-15), а его квадрат в сумме с седьмым членом и удвоенным пятым даст 0.

8. Найдите площадь треугольника ABC, если его вершины имеют следующие координаты: $A(-1;\ 1)$, $B(-5;\ 1)$ и $C(2;\ 2)$.

9. Решите неравенство

$$\sqrt{5x+6}>x.$$

10. Решите уравнение

$$\arcsin^2 x-\arcsin x-2=0.$$

11. Через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, делящая высоту треугольника противоположной грани в отношении 3:4, считая от вершины. Найдите боковую поверхность пирамиды, которая отсекается проведенной плоскостью, если боковая поверхность данной пирамиды равна 16.

12. Решите уравнение

$$4\cdot\sin 7x+3\cdot\cos 2x=-7.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Мяч, брошенный одним игроком другому под некоторым углом к горизонту со скоростью $v_0=20$ м/с, достиг высшей точки траектории через τ = 1 с. На каком расстоянии друг от друга находились игроки? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

2. На гладкой горизонтальной плоскости покоится тело массой M = 4 кг. Через время τ = 3 с после начала действия постоянной по величине и направлению горизонтальной силы тело достигло скорости $v=0{,}6$ м/с. Найдите величину этой силы. Силу какой минимальной величины и под каким углом к горизонту следует приложить к этому телу, чтобы перемещать его по шероховатой горизонтальной поверхности с ускорением a = 1 м/с^2, если коэффициент трения скольжения μ = 0,2, а ускорение свободного падения g = 10 м/с^2?

3. Одноатомный идеальный газ в количестве ν = 5 моль сначала охлаждают при постоянном объеме от температуры T_1 = 600 К до температуры T_2 = 400 К, а затем продолжают охлаждать при постоянном давлении до температуры T_3= 300 К. Какое количество теплоты отводят при этом от газа? Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

4. Вертикально расположенный плоский конденсатор, зазор которого заполнен керосином, зарядили и отключили от источника. При этом напряженность электрического поля в керосине оказалась равной $E=2\cdot10^6$ В/м. Из-за дефекта изоляции керосин начинает вытекать, а его место занимает воздух. Какая доля керосина вытечет из конденсатора к моменту его пробоя? Напряженность электрического поля в воздухе, при которой наступает пробой, равна $E_{пр}=3\cdot10^6$ В/м. Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon=2$.

5. В цепь, состоящую из источника ЭДС и резистора сопротивлением R = 2 Ом, включают амперметр сначала последовательно, а затем параллельно резистору. При этом показания амперметра оказываются одинаковыми. Сопротивление амперметра R_A= 1 Ом. Определите внутреннее сопротивление источника.

6. Оцените постоянную Планка, если фотоэлектроны, вырываемые с поверхности металла светом с частотой $\nu_1=1{,}2\cdot10^{15}$ Гц, задерживаются напряжением U_1= 3,1 В, а вырываемые светом с длиной волны λ_2 = 125 нм — напряжением U_2 = 8,1 В. Скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с, элементарный заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Вариант 2

1. Жонглер бросает мячи вертикально вверх с одинаковыми начальными скоростями и через одинаковые промежутки времени τ. Каждый мяч находится в полете в течение времени 4τ. В момент бросания четвертого мяча расстояние между вторым и третьим мячами равно s = 0,5 м. Вычислите длительность полета мяча. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

2. Санки, движущиеся прямолинейно по горизонтальному льду (без трения) со скоростью $v_0=6$ м/с, въезжают на асфальт, где коэффициент трения скольжения μ = 0.6. Какой путь пройдут санки по асфальту до полной остановки? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Санки считайте материальной точкой. Какой путь пройдут санки по асфальту до полной остановки, если считать санки однородным телом с длиной полозьев L = 1,2 м?

3. Если нагреть ν = 1 моль идеального газа на ΔT = 1 К при постоянном объеме, то давление возрастет на Δp= 10 Па. Если из того же исходного состояния нагреть газ на ΔT = 1 К при постоянном давлении, то объем увеличится на $\Delta V=10^{-3}$·м^3. Вычислите давление, объем и температуру газа в исходном состоянии. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

4. Заряженная капелька, несущая в себе заряд нескольких электронов, уравновешена электрическим полем и находится посередине между горизонтально расположенными пластинами плоского конденсатора, отстоящими друг от друга на расстояние d = 4 мм. Не отключая конденсатор от источника ЭДС, нижнюю пластину быстро поднимают на h = 1 мм. Через какое время и с какой пластиной столкнется капля? Ускорение свободного падения g =10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Если подключить к источнику ЭДС два одинаковых вольтметра, соединив их параллельно или последовательно, то вольтметры покажут одинаковые напряжения U = 8 В. Вычислите ЭДС источника.

6. Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы на расстоянии d = 0,12 м от нее. Луч, выходящий из источника под углом α = 4°, падает на линзу и выходит из нее под углом β = 8° к главной оптической оси. Постройте ход луча и вычислите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили
С.Кальней, С.Куклин,
А.Овчинников, В.Плис, И.Федоренко

Московский энергетический институт (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^2-4x}{\sqrt{5+x}-3}+\frac{\sqrt{20x^2+4x^3}-\sqrt{x^4+5x^3}}{\sqrt{x}-2}\right)\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^{\log_{0.09}x^2}.$$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения

$$2a\left(4^{x+2}+1\right)-\left(64a^2+1\right)2^x=0$$

являются целыми отрицательными числами.

3. Третий член арифметической прогрессии равен наибольшему значению функции $y=12x-x^3$ на отрезке $[1;3]$, девятый член прогрессии равен наименьшему значению данной функции на указанном отрезке. Найдите разность прогрессии.

4. Найдите все корни уравнения

$$3\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{61\pi}{4}\right)\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{61\pi}{4}\right)^{-1}+2\cos^2 x=\sin\frac{65\pi}{2},$$

удовлетворяющие неравенству

$$\frac{16x^3+8\pi x^2+\pi^2 x}{x+3\pi}<0.$$

5. Длины сторон параллелограмма равны a и b, острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением параллелограмма вокруг стороны длины a.

Вариант 2

1. Упростите выражение для функции

$$f(x)=1+x\left(1-x^7\right)+(x-1)\left(1-\frac{x^2}{1+x+x^2+x^3}-\frac{x^4}{(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)}-\frac{x}{1+x}\right)^{-1}$$

и для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\sqrt{a^2x^2+4a\cdot f(x)+4}+f(x)-1=0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3-5^{\log_{25}4}+\log_{0.04}x}+\sqrt{1+5^{\log_{25}4}+\log_{0.2}x}\le 1.$$

3. Сумма квадратов цифр некоторого положительного трехзначного числа равна 74. В этом числе цифра сотен равна удвоенной сумме цифр десятков и единиц. Найдите это число, если известно, что разность между ним и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 495.

4. Найдите все корни уравнения

$$\operatorname{tg}2x\cdot\cos\left(\frac{9\pi}{2}-2x\right)-3\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}2x\cdot\cos 2x=0,$$

лежащие на отрезке

$$\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right].$$

5. Медиана, заключенная между двумя сторонами треугольника с длинами 54 и 58 соответственно, на 4 меньше полусуммы длин этих сторон. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Публикацию подготовил В.Прохоренко

Российский государственный педагогический университет им.А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального n определена функция

$$f_n(x)=\frac{x-n}{x-2}\cdot\sqrt{x^2+2nx+4}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $f_2(x)$.

3) Найдите точки пересечения графиков функций

$$f_3(x)\ \text{и}\ g(x)=\frac{5}{4}\left(x^2+6x+4\right).$$

2. Решите неравенство

$$\log_{1/3}(1+|x|)\cdot\log_2(1/2+x)>0.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}(\pi(1+x))=\frac{1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\pi x\right)}{\sin(2\pi x)}+\sin(\pi(3+x)),$$

принадлежащие промежутку $[-1\ 2]$.

4. В трапеции $ABCD$ основания $AD=30$, $BC=20$ и боковые стороны $AB=6$, $CD=8$. Докажите, что прямая AB перпендикулярна прямой CD, и найдите площадь трапеции.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC=c$ и $BD=d$. Грани SAD и SCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Точки E и F лежат на серединах сторон ромба AD и DC (соответственно). Через вершину пирамиды S и точки E, F проведена плоскость. Площадь полученного сечения равна q. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Для каждого натурального n определена функция

$$f_n(x)=\log_3\left(x^2+nx-2n^2\right).$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $g(x)=3^{f_3(x)-1}$.

в) Пересекаются ли графики функций

$$f_2(x)\ \text{и}\ h(x)=\log_3\left(x^2-9\right)?$$

2. Решите неравенство

$$\left|x^2-3\right|\cdot(3-|2x-1|)>0.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\cos(\pi-5x)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\sin(\pi-2x)}=0,$$

принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\frac{2\pi}{3}\right)$.

4. В трапеции $ABCD$ известно, что $AD\parallel BC$ ($AD>BC$). Биссектриса угла BAD пересекает боковую сторону трапеции CD в точке E. Найдите площадь трапеции, если известно, что $CE:ED=1:3$, $CD\perp AD$, $BC=6$, $AB=10$.

5. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны между собой и равны a. Угол между равными сторонами треугольника, лежащего в основании, равен α. Найдите объем пирамиды.

Публикацию подготовили О.Корсакова, З.Новосельцева

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\sin x}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3xy-4x^3y^3=1,\\ x+y=2.\end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}3\ge 1.$$

4. Найдите длину хорды, пересекающей две смежные стороны квадрата, вписанного в окружность с радиусом R

и делящейся в точках пересечения со сторонами квадрата в отношении 3:4:3.

5. При каких значениях a уравнение

$$2\sqrt{1+2a-ax}=4-x$$

имеет единственное решение?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Покажите, что заданное число — целое:

$$(0{,}2)^{\log_5(0{,}5)}+\log_{\sqrt{3}}\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+$$
$$+\log_{1/3}\frac{1}{7+2\sqrt{10}}.$$

2. Решите неравенство

$$(0{,}5)^{2\sqrt{x}+1}+(0{,}5)^{\sqrt{x}}<0{,}5+(0{,}5)^{\sqrt{x}+2}.$$

3. Найдите все значения p, при которых уравнение

$$x^2+2x-|x+1|+p=0$$

имеет столько же различных корней, сколько их у него при $p=-1$.

4. Найдите наименьшее положительное решение уравнения

$$2\sin^2 x+\sin x^2=1.$$

5. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Какова ее разность, если радиус описанной вокруг треугольника окружности втрое больше радиуса вписанной?

Вариант 3

(факультет экономики и менеджмента)

1. Решите уравнение

$$\cos x-\sin x+1+\sin 2x=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2\left(2^{x+1}+4^x-8^x\right)\le x-2.$$

3. При каких значениях параметра α сумма кубов корней уравнения

$$x^2+\sin\alpha\cdot x+\cos^2\alpha=0$$

равна (-1)?

4. Центр окружности C_1 радиусом 1 (точка O_1) лежит на окружности C_2 радиусом $r>1$ с центром в точке O_2. Окружность C_3 касается окружностей C_1 и C_2 внутренним образом, причем центр окружности C_3 лежит на прямой, перпендикулярной отрезку O_1O_2 и проходящей через точку O_2. При каком значении $r>1$ радиус окружности C_3 будет наименьшим? Чему он будет равен?

5. Для каждого действительного a решите систему неравенств

$$\begin{cases}ax-1>2a+3x,\\ 4x-5>a(1-x).\end{cases}$$

Вариант 4

(факультет технической кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-2y=1,\\ x^3+2y^2=1.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2+6x\right)+4\log_{x^2+6x}2\le 4.$$

3. Найдите наибольшее действительное число $x\le 10$, для которого $x+\frac{1}{x}$ — целое число.

4. Найдите множество значений параметра a, при которых уравнение

$$5+a(\cos x-\sin x)+\sin 2x=2\sqrt{2}$$

имеет решение.

5. В треугольнике ABC угол $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$. Через центр H вписанной в треугольник ABC окружности проведена касательная l к окружности, проходящей через точки B, H и C. Пусть D — точка пересечения l со стороной AB. В каком отношении точка D делит сторону AB, если $BH=2HC$?

Публикацию подготовили
Е.Подсыпанин, С.Преображенский, Ю.Хватов

Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова

(Начало см. на с. 39)

вым шагом в решении вопроса о распределении простых чисел. Чебышёв показал, что при больших N число $\pi(N)$ заключается в границах $0{,}92N/\ln N<\pi(N)<1{,}11N/\ln N$. Он доказал также, что если отношение $\pi(N):N/\ln N$ при $N\to\infty$ стремится к какому-либо пределу, то этот предел равен 1.

Доказательство существования этого предела было получено через 50 лет после работ П.Л.Чебышёва французским математиком Ж.Адамаром и потребовало искусного применения теории функций комплексного переменного. Элементарное (но очень сложное) доказательство было найдено замечательным датским математиком А.Сельбергом в 1948 году.

Несколько усовершенствовав доказательство (вполне элементарное, хотя и не простое) постулата Бертрана, можно доказать справедливость «усиленного» постулата Бертрана: *при любом $n\ge 9$ между n и $2n$ находится не менее трех простых чисел.*

Завершение доказательства гипотезы Ченцова

Поскольку $p_5=11$, из усиленного постулата Бертрана следует, что при всех простых $p\ge p_5$ между числами p и $2p$ имеется по крайней мере три простых числа, и потому с помощью конструкций рисунков 5 и 6 и китайской теоремы об остатках можно простроить $*$-набор длины $k\ge p_5+p_6-1=23$.

Для завершения доказательства достаточно простроить $*$-наборы длины k при $k=18, 19, 20, 21, 22$. Эти наборы строятся с помощью рисунка 3 (или рисунка 4) добавлением строк (при $k=18$, 19 добавляется строка 17| 1, 18, а при $k=20$, 21, 22 — еще и строка 19| 1, 20).

Гипотеза Ченцова полностью доказана.

Упражнение 7. Выпишите наименьшие числа $*$-наборов при $k=18$, 19, 20, 21, 22.

Литература

1. *Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М.: Физматлит, 1976.

2. *Э.Трост.* Простые числа. — М.: Физматгиз, 1959.

3. *А.Егоров.* Деление с остатком и сравнения по модулю. — «Квант» №6 за 1991 г. или Приложение к «Кванту» №2 за 1994 г.

ЗАОЧНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, и прежде всего — на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ готовит физиков – теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений — таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. *Решение вступительного задания необходимо отослать до 1 сентября по адресу: 119899 Москва, ГСП, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.* В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7 × 12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 классов ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону (095) 939-38-78 с 16 до 18 часов по рабочим дням.

Фамилия, имя, отчество	*Нефедов Николай Николаевич*
Класс ЗФШ	*10*
Профессия родителей	*мать — инженер, отец — врач*
Подробный домашний адрес	*120713 г.Тула, ул.Лермонтова, д.24, кв.26*
Номер и адрес школы	*школа №444, Огородный пр., д.11*

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1 — 4, поступающим в 11 класс — задачи 3 — 6.

1. Приборы, установленные на берегу, показывают, что ветер дует с юго-запада, а величина скорости ветра равна 5 м/с. Что покажут аналогичные приборы, установленные на корабле, идущем на запад со скоростью 36 км/ч?

2. На пути тела массой m, скользящего по гладкой плоскости, находится горка высотой H и массой M. При какой минимальной скорости тела оно сможет преодолеть горку? Горка может скользить без трения по плоскости, не отрываясь он нее.

3. Однородный стержень согнут в виде прямого угла со сторонами a и b и подвешен на гвоздь, вбитый в вертикальную стенку. Какой угол образует сторона a угла с вертикалью?

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики (и приведите ее решение).

5. Смешали объем V_1 воздуха с относительной влажностью φ_1 и объем V_2 воздуха с влажностью φ_2. Обе порции воздуха взяты при одной и той же температуре. Смесь занимает объем $V_1 + V_2$. Определите относительную влажность смеси.

6. Чему равен заряд заземленной металлической сферы радиусом R, если на расстоянии a ($a > R$) от ее центра находится точечный заряд $q > 0$?

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ПРИ «КУРЧАТОВСКОМ ИНСТИТУТЕ»

В 1995 году начал свою работу Физико-математический колледж, входящий в состав Института естественных наук и экологии (ИНЕСНЭК) при Российском научном центре (РНЦ) «Курчатовский институт».

Колледж готовит высококвалифицированных специалистов в области физики и прикладной математики и информатики. Занятия проводятся на базе РНЦ. За основу обучения взята схема, успешно опробованная ранее в Московском физико-техническом институте и Новосибирском государственном университете. Эта схема подразумевает интенсивное изучение базовых университетских курсов физики и математики в течение первых лет обучения, чтобы уже со второго — третьего курса студенты могли принимать активное участие в научных исследованиях, проводимых в РНЦ. Количество студентов на курсе сравнительно небольшое (не более 20 человек), что позволяет сделать обучение практически индивидуальным. Как общие, так и специальные курсы читаются ведущими учеными — сотрудниками РНЦ и научно-исследовательских институтов Российской академии наук, — непосредственно работающими в данных областях физики и математики. Спектр исследований, проводимых в РНЦ, достаточно обширен. Это — фундаментальные исследования в области термоядерного синтеза, физики элементарных частиц, слабого взаимодействия, кварк-глюонной плазмы, высокотемпературной сверхпроводимости, физики твердого тела, математического моделирования в экологии, работы по созданию нового поколения безопасных ядерных реакторов и многое другое. По всем этим направлениям РНЦ имеет прочные контакты и ведет совместные работы с ведущими мировыми научными центрами.

Обучение в колледже — 4 года. Окончившие колледж получают диплом бакалавра и продолжают учиться в ИНЕСНЭК еще 1 год и 10 месяцев до получения диплома магистра. Набор на первый курс осуществляется по результатам письменных экзаменов — по физике, математике и русскому языку — и собеседования. Вступительные экзамены проводятся в июле. Уровень требований на экзаменах достаточно высок — аналогичен требованиям вступительных экзаменов в МФТИ, на механико-математический и физический факультеты МГУ и в другие ведущие вузы.

Справки о поступлении можно получить по телефону 196-53-11 с 10 до 17 часов по рабочим дням.

Адрес колледжа: *123182 Москва, ул. Максимова, д.4.*

Ниже приводятся образцы задач письменного вступительного экзамена 1996 года по математике и физике.

Математика

1. Найдите все корни уравнения

$$\log_x \cos x + 2\log_{(1/x)}(-\sin x) = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\left|x^3 - 5x^2 + 8x + 2\right| < \left|x^3 - 7x^2 + 2x - 2\right|.$$

3. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 15x + 2y = 12, \\ 5xy - 6z^2 = 6. \end{cases}$$

4. В прямоугольной трапеции с боковыми сторонами c и d ($d > c$) проведена прямая, параллельная основаниям. Она рассекает трапецию на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Определите основания исходной трапеции.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания пирамиды a и боковым ребром, наклоненным к плоскости основания под углом φ. Через вершину основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру. Найдите площадь сечения.

6. Касательная к графику функции $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ такова, что абсцисса x_0 точки ее пересечения с осью Ox принадлежит интервалу $[-0{,}5;\ 0)$. При каком значении x_0 площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x = 3$, будет наименьшей? Найдите эту наименьшую площадь.

7. При каком значении n выражение

$$\frac{\log_a 2 \cdot \log_a 3 \cdot \log_a 4 \cdot \ldots \cdot \log_a n}{a^n} \quad (a > 1)$$

будет принимать наименьшее значение?

Физика

1. С вершины гладкого клина массой M, высотой h и углом наклона α (рис.1) съезжает брусок массой m. Клин

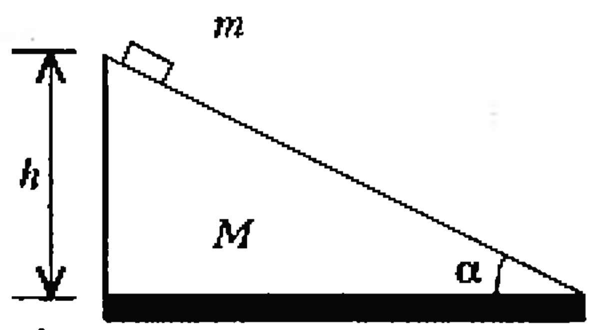


Рис. 1

находится на горизонтальной плоскости, трения между бруском и клином нет. а) Каков должен быть минимальный коэффициент трения между клином и плоскостью для того, чтобы при спуске бруска клин оставался в покое? б) Какую скорость приобретет клин после спуска бруска, если трения между клином и плоскостью нет? Размерами бруска по сравнению с размерами клина пренебрегите.

2. Теплоизолированный цилиндрический сосуд объемом V разделен жестко закрепленным поршнем на две равные части. По обе стороны поршня находятся одноатомные газы под од-

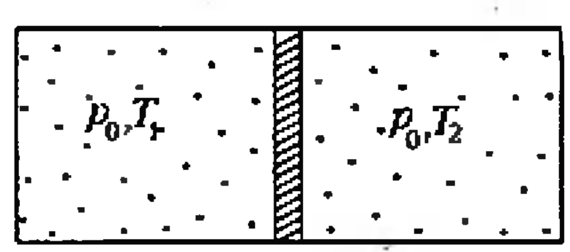


Рис. 2

ним и тем же давлением p_0, но с разными температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$) (рис.2). После того как поршень отпускают, система медленно переходит в новое равновесное состояние. а) Какая температура установится в сосуде? б) Какое количество теплоты перейдет через поршень от одного газа к другому в процессе установления равновесия? Оба газа считайте идеальными. Трением поршня о стенки цилиндра пренебрегите.

3. В электрической цепи, состоящей из резисторов сопротивлением R, катушек индуктивностью L и источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис.3), в начальный момент времени

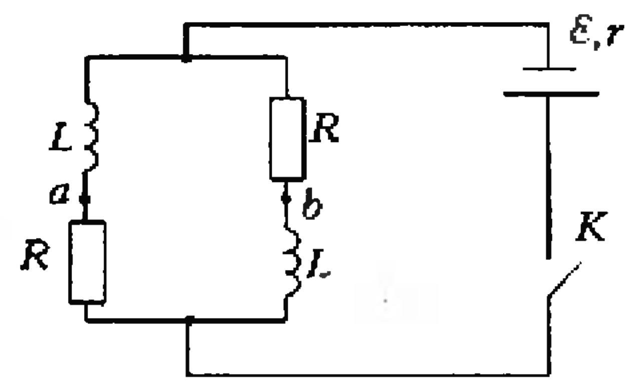


Рис. 3

замыкают ключ K. а) Найдите минимальное и максимальное напряжения между точками a и b при $r = 0$. б) Найдите минимальное и максимальное напряжения между точками a и b при $r \neq 0$.

4. Свет распространяется в неоднородной среде с показателем преломления n, который зависит от высоты $z > 0$ по закону $n = n_0/(1 + bz/n_0)$, где n_0 и b — заданные константы. Для луча света, испущенного под углом θ к горизонту с поверхности Земли, найдите: а) под каким углом свет распространяется на высоте z; б) радиус дуги окружности, по которой распространяется свет. Угол θ не слишком большой, так что n все время остается больше 1.

МОСКОВСКАЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ШКОЛА №1189

Несколько лет назад на базе экспериментальной школы №1189 города Москвы начали работать классы с углубленным изучением физики и математики. Инициаторами их открытия были Департамент образования Северо-Западного округа Москвы, Российский научный центр (РНЦ) «Курчатовский Институт» и Московский физико-технический институт. Учащиеся 10 и 11 классов проходят обучение в дневных классах, а 8 и 9 – в вечерних. Программы по физике и математике разработаны таким образом, чтобы заложить основы общей физико-математической культуры и детально изучить эти предметы на уровне требований, необходимых для поступления в МФТИ и другие ведущие вузы страны. В частности, учащиеся выполняют задания Заочной физико-технической школы при МФТИ. Уже состоялись два выпуска физико-математических классов. Все окончившие успешно поступили в такие вузы, как МФТИ, МИФИ, на механико-математический и физический факультеты МГУ.

Занятия по физике и математике в дневных классах проводятся по группам численностью не более 10 человек. Программа по математике включает в каждой группе три часа алгебры, три часа геометрии и два часа математического анализа в неделю, по физике – шесть часов семинарских занятий и два часа лабораторных работ. Занятия ведет коллектив докторов и кандидатов физико-математических наук, активно работающих и в РНЦ, и в МФТИ. Курс «Компьютерное моделирование физических процессов» подразумевает в течение первого полугодия освоение техники программирования на языке СИ, а в дальнейшем – самостоятельную разработку программ, которые позволяют изучать отдельные темы из курсов механики, теорий колебаний и физики фракталов. Занятия по этому предмету проводятся по три часа в неделю на базе РНЦ. Большое внимание уделяется также углубленному изучению английского языка, которое происходит во внеурочное время (факультативно) по четыре часа в неделю.

В вечерних классах занятия по физике и математике проводятся два раза в неделю по четыре часа.

Большой объем занятий и их высокая интенсивность в свою очередь предъявляют достаточно серьезные требования к учащимся физико-математических классов. Прием в дневные классы школы проводится по результатам собеседования, а в вечерние классы прием свободный.

Справки о поступлении можно получить по телефону 193-60-23.

Адрес школы: *123182 Москва, ул.Василевского, д.9, кор.1.*

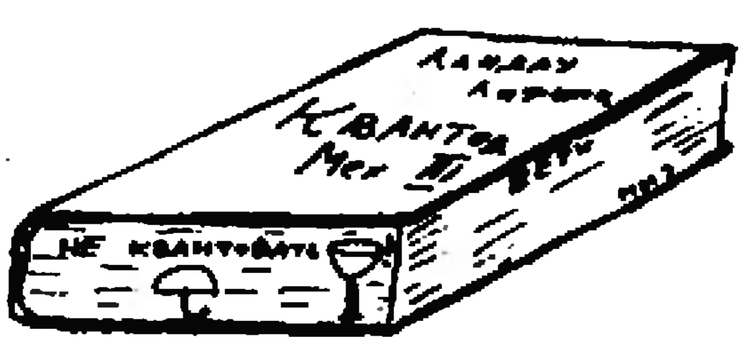
ФИЗТЕХУ — ПЯТЬДЕСЯТ

Московскому физико-техническому институту (МФТИ) исполнилось 50 лет. Редакция журнала «Квант» сердечно поздравляет студентов, выпускников и преподавателей института с этим юбилеем.

Вряд ли можно найти еще одну пару журнал — вуз, столь тесно связанную, как «Квант» — МФТИ. С момента основания журнала до сего времени заметную часть редколлегии журнала составляют выпускники и преподаватели Физтеха, а большая часть студентов МФТИ изучала «Квант» в свои школьные годы.

Многие студенты Физтеха продолжают читать «Квант» и на студенческой скамье. Это проявляется на государственном экзамене по физике, проходящем на III курсе. Один из вопросов экзамена каждый студент выбирает заранее сам. Довольно часто тему этого вопроса студенты берут из публикаций «Кванта».

«Квант» нередко называют элитарным журналом, рассчитанным на наиболее одаренных и увлеченных наукой юношей и девушек. Публикации журнала — отнюдь не легкое чтиво. Но именно постоянные читатели журнала являются наиболее желанными абитуриентами и с легкостью преодолевают барьеры вступительных экзаменов. Так и Физтех является элитарным вузом, учиться в котором под силу лишь одаренным и увлеченным наукой. Глубокие знания, умение много и плодотворно работать — эти качества, воспитываемые в студентах Физтеха, дают возможность выпускниками быть на переднем крае многих отраслей фундаментальной и прикладной науки, да и не только науки.

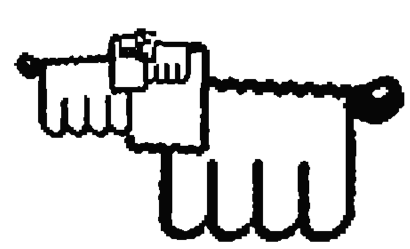


Желаем Физтеху высоко держать знамя флагмана российского просвещения, новых успехов в подготовке интеллектуальной элиты XXI века!

Знаете ли вы, что

— за 50 лет МФТИ закончили 22 тысячи человек;

— среди основателей МФТИ были нобелевские лауреаты П.Л.Капица и Н.Н.Семенов, которые затем долгое время преподавали в нем;



— В МФТИ девять факультетов:
радиотехники и кибернетики,
общей и прикладной физики,
аэрофизики и космических исследований,
молекулярной и химической физики,
физической и квантовой электроники,
аэромеханики и летательной техники,
управления и прикладной математики,
проблем физики и энергетики,
физико-химической биологии;

— семь тысяч выпускников стали кандидатами наук, три тысячи — докторами наук, более пятидесяти — членами и членами-корреспондентами Российской академии наук;

— в 1996/97 учебном году в МФТИ обучается 2381 иногородний студент;

— в МФТИ 31 институтская кафедра и 108 кафедр в научно-исследовательских институтах;

— от института до платформы Новодачная Савеловской ж.д. 815 шагов;

— на Физтехе каждый второй первокурсник — очкарик, а на остальных курсах — лишь около 40%;

— приемные экзамены в МФТИ начинаются: первый поток 25 июня, второй поток 1 июля, а еще до этого в конце весенних каникул проводятся

пробные экзамены по математике и физике письменно;

— более подробную информацию об МФТИ можно получить, написав по адресу: 141700 г.Долгопрудный, МФТИ, Приемная комиссия или позвонив по телефону (095) 408-48-00;

— подготовили этот материал А.Савин и редакция многотиражной газеты МФТИ «За науку».

Нестандартные физтехи

Для выпускника МФТИ стандартной является следующая последовательность ступенек карьеры: кандидат — доктор — член-корреспондент, действительный член академии наук.

Но есть и исключения: учитель, журналист, банкир, президент фирмы и т.д. Вот трое из них: замечательный артист А.Филиппенко, секретарь Совета обороны Ю.Батурин, известный космонавт А.Серебров.

VI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб «Глюон» в рамках программы «Дети. Интеллект. Творчество» провел очередную международную тест-рейтенговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон». Она прошла в Болгарии в городе Созополе с 21 по 28 октября 1996 года. В олимпиаде участвовали 19 команд из различных регионов России, Болгарии и Польши.

22 октября состоялось открытие олимпиады, где участников приветствовали соорганизаторы олимпиады — представители Национального технического университета (София) и Союза физиков Болгарии. В тот же день состоялся первый тур олимпиады — устные командные соревнования «История научных идей и открытий». Победу в нем, как и в прошлом году, одержала замечательная команда Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону).

23 октября с утра прошел письменный индивидуальный тур по физике, где каждому участнику предлагалось 7 задач, на решение которых отводилось 4 часа. Во второй половине дня состоялись устные командные соревнования по математике, победу в которых разделили команды из городов Соснового Бора (Ленинградская область) и Кирова.

Традиционно четвертый день олимпиады был посвящен знакомству с древней культурой Созополя, города, основанного древними греками в IV в. до н.э. (тогда он назывался Аполлония).

25 октября состоялся письменный индивидуальный тур по математике и устные командные соревнования по физике, в которых и на этот раз победила команда Ростова-на Дону.

Затем был день подведения итогов и отдыха. А 27 октября — закрытие олимпиады и награждения.

Победителем в индивидуальном общем зачете стал Сергей Злобин — ученик ФМЛ из Кирова. Он же — победитель в индивидуальном зачете по математике. Второе место занял ученик того же лицея Константин Тарачев, он же — победитель по физике. Третье место было присуждено Александру Твaладзе из Классического лицея 1 при РГУ. Командные соревнования в общем зачете выиграла делегация ФМЛ из Кирова. Второе место поделили команды из Академического колледжа при Казанском университете и Классического лицея из Кемерова.

По устоявшейся традиции Оргкомитет олимпиады определил «Мисс «Олимпиада — 96». Ею стала ученица 11 класса школы «Поиск» из Ставрополя Анна Крапивницкая, которая показала лучший результат среди девушек. Были также вручены специальные призы от газеты «1 сентября». Их получили команды Ставрополя и Соснового Бора как постоянные участники олимпиады и команды физматшкол Обнинска и Нового Уренгоя как самые массовые.

Седьмая традиционная олимпиада «Интеллектуальный марафон» состоится в октябре 1997 года. Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает все школы, лицеи и гимназии, занимающиеся с одаренными детьми, принять в ней участие.

Заявки присылайте не позднее 15 августа 1997 года по адресу:
Россия, Москва, 115580, а.я. №62, МИК «Глюон».
Факс: (095) 396-82-27, e-mail: olga@mics.msu.su.

Задачи

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. В десятичной записи числа $1/14$ вычеркнули 1996-ю цифру после запятой. Что больше: полученное число или $1/14$?

2. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AP и AQ на биссектрисы углов B и C треугольника (или их продолжения). Найдите PQ, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

3. Найдите два двузначных числа, если известно, что сумма остальных двузначных чисел в 50 раз больше одного из этих двух чисел.

4. В некоторой компании n мальчиков и $n + 1$ девочка. Может ли случиться так, что все девочки знакомы с различным количеством мальчиков, а все мальчики с одинаковым количеством девочек, если

а) $n = 5$;

б) n — произвольное натуральное число (укажите все возможные значения n)?

5. На сторонах BC и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки E и F соответственно так, что треугольник AEF — правильный. Найдите площадь треугольника CEF, если $S_{ABE} = S_1$, а $S_{ADF} = S_2$.

6. Числа x, y и z попарно различны и удовлетворяют соотношениям

$$x + 1/y = y + 1/z = z + 1/x.$$

Чему может равняться xyz?

7. При каких натуральных n существуют выпуклые n-угольники, которые можно разрезать на конечное число квадратов и правильных треугольников?

Физика

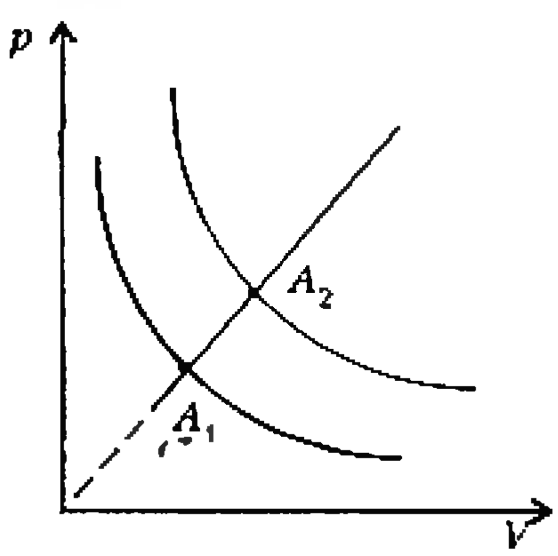
1. Под каким углом к берегу необходимо плыть на лодке, чтобы снос по течению был наименьшим, если скорость лодки относительно воды $v_л$, а скорость реки: а) постоянна по всей ширине реки и равна $v_р$ (причем $v_р > v_л$); б) изменяется по линейному закону: равна нулю у берегов, на середине реки максимальна и равна v_0 (причем $v_0 > 2v_л$)?

2. На горизонтальной поверхности лежит длинный брусок массой M, на поверхности которого лежит шарик массой m. В начальный момент времени брусок начинает двигаться по плоскости со скоростью v_0, а шарик подскакивает вверх. Определите путь, пройденный бруском до остановки. Считайте, что шарик успевает много раз стукнуться о поверхность бруска, не соскакивая с него. Удар предполагайте абсолютно упругим, коэффициент трения бруска о горизонтальную поверхность μ.

3. Одной из существенных причин образования космической пыли являются энергетичные столкновения астероидов, когда кинетическая энергия удара E достаточна для полного испарения обоих сталкивающихся тел. Образовавшийся газовый шар массой M и радиусом R расширяется, пока его плотность не достигнет плотности насыщенных паров, при которой начнется конденсация и образование частиц космической пыли. Оцените время до начала образования космической пыли и установите закон изменения плотности газового шара до начала образования космической пыли.

4. На конце нерастяжимой нити длиной L прикреплен шарик массой M. Нить может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси. Шарик толкают со скоростью v. Найдите высоту, на которую поднимется шарик.

5. На графике изображены две адиабаты для одного и того же количества идеального газа. Определите температуру T для точки, находящейся на середине отрезка прямой A_1A_2. Прямая проведена из начала координат и



пересекает адиабаты в точках A_1 и A_2. Температура в точке A_1 равна 400 К, а в точке A_2 составляет 6000 К.

6. Три небольших одинаковых незаряженных металлических шарика, находящихся в вакууме, расположены в вершинах правильного треугольника. Шарики поочередно по одному разу соединяют с бесконечно удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике образуется заряд Q_1 = 12мкКл, а на третьем — заряд Q_3 = 3 мкКл. Определите заряд второго шарика.

7. Терморегулятор электрокалорифера периодически включает нагрев на время δt и затем отключает его, поддерживая таким образом почти неизменную заданную температуру. При нормальном напряжении в сети продолжительность промежутков составляет δt = 2 мин, а при понижении напряжения более чем на 20% калорифер уже не может поддерживать заданную температуру. Чему равна продолжительность включения при понижении напряжения на 10%?

Устный командный тур (избранные задачи)

Математика

1. Вычислите

$$\sqrt{1993\cdot 1995\cdot 1997\cdot 1999+16}\,.$$

2. В однокруговом хоккейном турнире участвуют 8 команд, 4 из которых выходят в финал. Какое наименьшее количество очков должна набрать команда, чтобы обеспечить себе выход в финал? (Победа — 2 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0 очков.)

3. Найдите: а) наибольшее; б) наименьшее число, делящееся на 11, десятичная запись которого состоит из 10 попарно различных цифр (0 не может быть первой цифрой числа).

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC, вне его, построены квадраты $AA'B'B$ и $AA''C'C$. Найдите $A'A''$, если медиана AM треугольника ABC равна m.

5. После вечера танцев каждый из его участников (мальчиков и девочек) сообщил количество танцев, в которых он участвовал: 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Все ли сказали правду? (Мальчики танцевали только с девочками, а девочки только с мальчиками. От танца к танцу пары могли меняться.)

Физика

1. В цилиндрический стакан наливают воду. При каком уровне воды в стакане центр тяжести системы (стакана с водой) занимает наинизшее положение?

2. Известно, что в атмосфере при −15 °С могут долго и устойчиво существовать облака из переохлажденных капель воды неизменного размера. Являются ли устойчивыми облака, состоящие из ледовых кристаллов и переохлажденных капель?

3. Как охладить бутылку с водой, сидя в жаркую погоду в душном поезде?

4. Тело брошено под углом к горизонту в воздухе. Сравните времена подъема и спуска.

5. Герметичный сосуд полностью заполнен водой. На небольшой поршень площадью S давят рукой с силой F. Поршень находится ниже крышки сосуда на H_1 и выше дна на H_2. На какую высоту поднимется струйка фонтана, если в крышке сосуда проделать маленькое отверстие?

История научных идей и открытий (избранные задачи)

Математика

1. Эту задачу считал решенной Ферма, опроверг его мнение Эйлер, а к необходимости вернуться к проблеме пришел Гаусс. Что это за задача? (Она до сих пор не решена.)

2. Эта область математики была частью астрономии, затем стала самостоятельным разделом математики, после чего превратилась в учебный предмет. О чем идет речь?

3. Математики древней Греции числа вида $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ называли треугольными, числа $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ — квадратными, числа $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ — прямоугольными, числа $1 + 4 + 7 + \ldots (3n - 2)$ — пятиугольными. Почему эти числа так называли?

4. Назовите математические предложения, названные в честь известных математиков (пример — теорема Пифагора).

Физика

1. Изобретатель термометра за основную температурную точку, равную 0, выбрал температуру смеси воды, льда и поваренной соли. Что это за шкала и чему равна температура кипения воды по этой шкале?

2. Какой великий ученый какое наблюдаемое им явление описывал так: «Свет периодически испытывает приступы легкого прохождения и приступы легкого отражения»?

3. Назовите физические термины, смысл которых не соответствует их содержанию.

4. Какое наиболее значительное открытие современности, связанное с глобальной деятельностью человечества, было сделано за письменным столом, а обнаружено только через десять лет природными измерениями?

5. Немецкий ученый Г.Лейбниц положил в основу учения о движении, названного им динамикой, учение о «живых и мертвых силах». Что он так называл?

Публикацию подготовили
В.Альминдеров, А.Егоров,
В.Крыштоп, О.Поповичева

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Наибольшая сумма будет для расположений, в которых первая цифра 1, последняя 0, а остальные цифры расположены в произвольном порядке. При каждом таком расположении сумма двузначных чисел будет равна 494. Наименьшая сумма будет в том случае, если первой цифрой будет 8, а последней 9. В этом случае сумма равна 397. Чтобы показать это, достаточно заметить, что все цифры, кроме первой и последней, участвуют по два раза: как число десятков и как число единиц.

2. Пьеро получил от Панталоне 20 подзатыльников. При решении следует отметить, что отбил руку не Артемон — тот мог отбить себе разве что лапу.

3. Число $n!$ не может оканчиваться ровно на 5 нулей. Для этого следует отметить, что каждый новый нуль получается при умножении этого числа на число, делящееся на 5. Первым будет число 5, вторым число 10, третьим 15, четвертым — 20, а пятым — число 25, но оно содержит два множителя 5, поэтому число 24! оканчивается на четыре нуля, а число 25! на шесть нулей. Следующие числа имеют уже не менее шести нулей на конце.

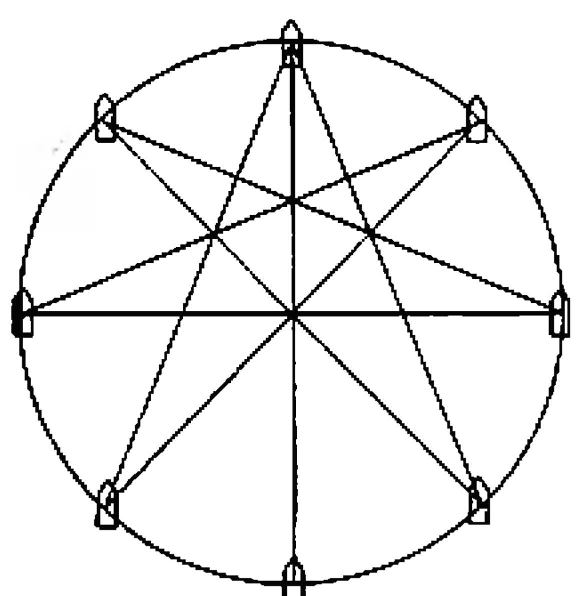


Рис. 1

4. Одно из решений приведено на рисунке 1.

5. Оба правы.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6—8»

(см. «Квант» №6 за 1996 г.)

11. Докажем более сильный факт, а именно, что перестановкой цифры 7 в числе, состоящем из одной семерки и нескольких единиц (количеством не меньше двух), можно добиться, чтобы полученное число делилось на 7 или на 13, если оно не делится на 3.

Используем следующие разложения чисел на множители:

$$111111=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37,$$

$$7111=13\cdot547,$$

$$11711=7\cdot1673,$$

$$11171111=7\cdot1595873.$$

Пусть число единиц в записи нашего числа равно $n = 6k + p$. Если $p = 2$ или 5, то сумма цифр числа делится на 3, следовательно, и само число делится на 3.

Если $p = 0$, то число, составленное из одних единиц, делится на 7, следовательно, приписав впереди 7, вновь получим число, делящееся на 7.

Если $p = 1$, то начнем число с комбинации 11171111, которая делится на 7. Число, составленное из единиц, которое стоит за ним, также делится на 7, так как оно разбивается на шестерки единиц.

Если $p = 3$, то, начав число с комбинации 7111, делящейся на 13, получим число, делящееся на 13.

Если $p = 4$, то начинаем число с комбинации 11711, делящейся на 7.

12. Переставим все четные вертикальные полоски вправо, а нечетные влево, после этого все четные горизонтальные полоски вниз, а нечетные вверх, как это показано на рисунке 2. При этом квадрат разделился на 4 прямоугольника, причем общая площадь двух черных прямоугольников равна суммарной площади двух белых прямоугольников. Отсюда следует, что или горизонтальная, или вертикальная прямая, которая

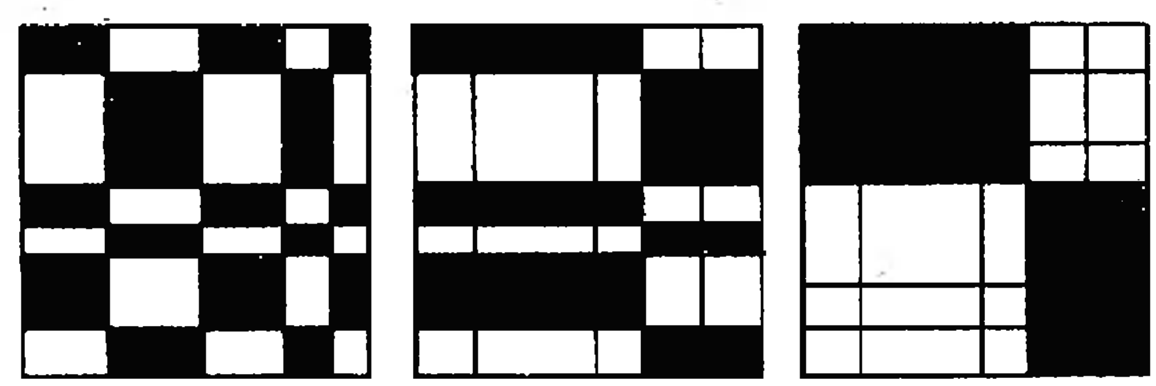


Рис. 2

проходит по сторонам этих прямоугольников, делит площадь квадрата пополам, откуда и вытекает утверждение задачи.

13. Такими числами являются лишь числа вида $125\cdot10^k$, где k — целое неотрицательное число. Для остальных чисел указанная последовательность будет строго возрастающей.

14. Повернем треугольник ABC на 60° вокруг точки M, как это показано на рисунке 3. Точка A перейдет в точку A_1, точка B — в B_1, точка C — в C_1. Нетрудно видеть, что угол A_1B_1B равен углу CBM, поэтому треугольники A_1B_1B и CBM равны, так как равны попарно стороны, примыкающие к указанным углам. Значит, $A_1B = MC$.

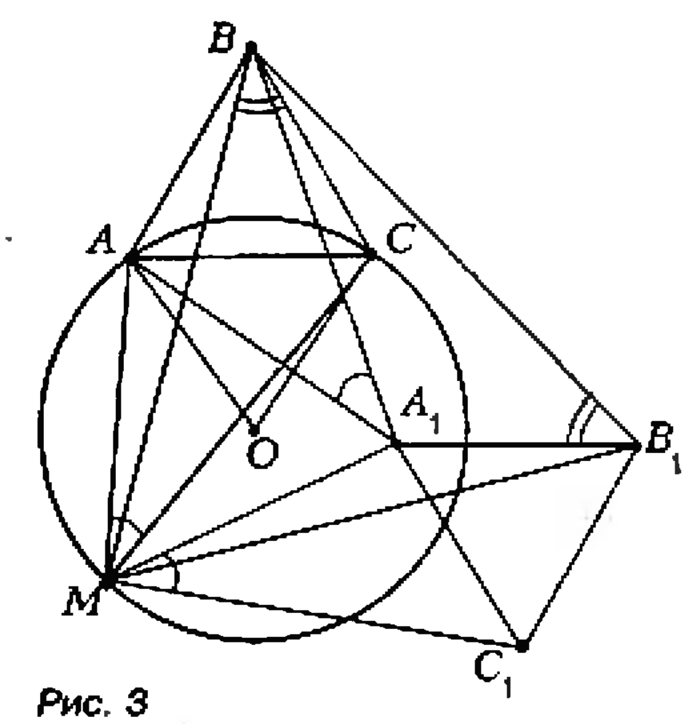


Рис. 3

Треугольники MAC и A_1AB равны по трем сторонам, а так как угол $AMC = 30°$, то и угол AA_1B равен 30°. Заметим, что угол MA_1A равен 60°, так как треугольник MAA_1 — равносторонний. Значит, угол MA_1B равен 90° и $MA_1^2 + A_1B^2 = MB^2$, но $MA_1 = MA$, а $A_1B = MC$. Утверждение задачи доказано.

15. Разобьем квадрат 19×19 на 24 прямоугольника 3×5 так, как указано на рисунке 4. Предположим, что в каждом из них закрашено не менее четырех клеток. Тогда всего в квадрате будет закрашено не менее $4\cdot24 = 96$ клеток, что противоречит условию задачи. Следовательно, хотя бы в одном прямоугольнике 3×5 закрашено не более трех клеток. На рисунке 5 дан пример закраски 96 клеток квадрата, при которой в каждом прямоугольнике 3×5 закрашено не менее четырех клеток.

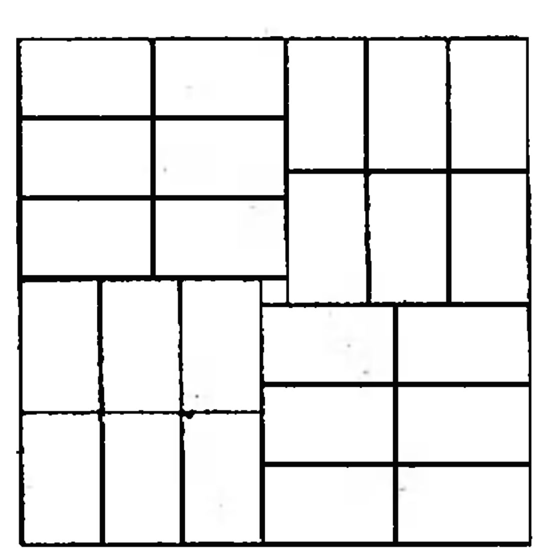


Рис. 4

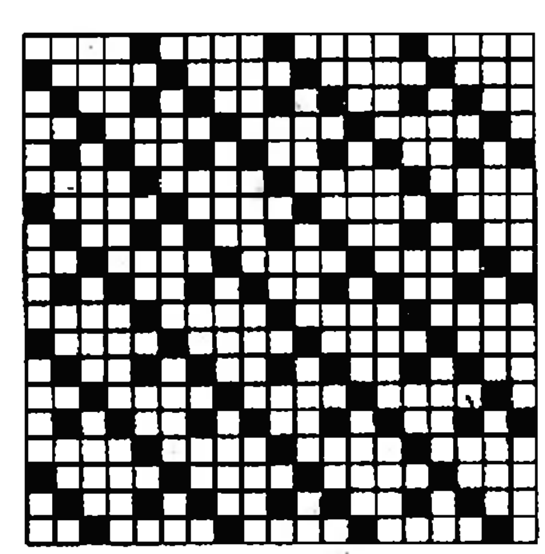


Рис. 5

ПРЕДЪЯВИТЕ ВАШИ АРГУМЕНТЫ!

1. Порочный круг и довод к публике (апелляция к умилению и жалости).
2. Нарушение тождества: разный смысл слов *экономить время*. В первом утверждении эти слова означают «за то же время сделать больше дел», а во втором — «одно дело сделать за меньшее время».
3. Ложное основание. Среди таких дробей не существует наименьшей.
4. Ошибка вывода: вместо прямого утверждения доказывается обратное. Можно считать также, что это подмена тезиса (доказываемого утверждения).
5. Нарушение тождества. Слова «каждый пятый» можно понимать в двух смыслах — «пятый по счету» или «пятая часть» [всех детей].
6. Подмена тезиса при доказательстве единственности: непонимание того, что доказано. При таком рассуждении показано только, что плоскость, *построенная таким способом*, единственна, но способ построения можно и изменить.
7. Ошибка «не следует». Высказывание продавца (посылка) означало: «Для любого размера ноги у нас есть подходящие ботинки», покупатель же расшифровал его фразу так: «Существуют ботинки, подходящие для любого размера ноги» (это тезис). Но второе высказывание не равносильно первому и не вытекает из него. Ошибка связана с нечеткостью формулировок, которая допускается в разговорной речи.
8. а) Это не Сова, и я Винни-Пух.
б) Исходное высказывание формально можно записать так: *Если бояться волков, то не надо ходить в лес.* Отрицание этого высказывания выглядит так: [*Можно*] *бояться волков и* [*все же*] *ходить в лес.*
в) *Студент повторял не все лекции*, или, по-другому, *существует хотя бы одна лекция, которую студент не повторил.*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Положительный.
2. Нет, не всегда. Разность потенциалов может отсутствовать, если проводники находятся в поле, созданном другими заряженными телами (см., например, рисунок 6, где шары A и B зарядились по индукции под действием внешнего однородного поля).
3. Весь объем шара является эквипотенциальной

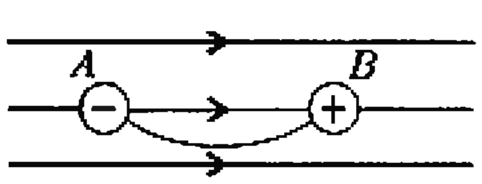


Рис. 6

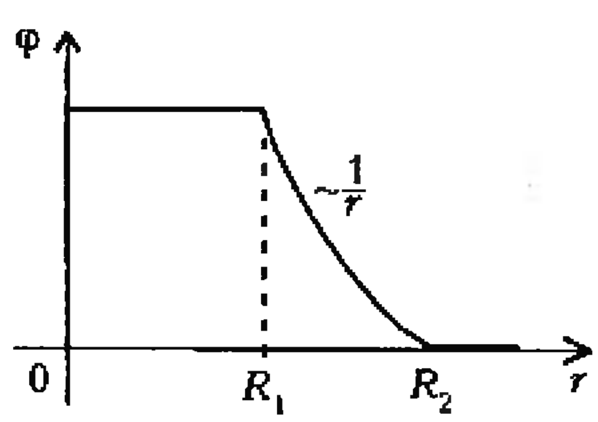


Рис. 7

областью. Ее потенциал равен потенциалу, создаваемому точечным зарядом в центре шара: $\varphi = = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$. (Потенциал, создаваемый в центре шара зарядами, индуцированными на его поверхности, равен нулю.)
4. Нет.
5. Потенциал сферы станет равным нулю.
6. См. рис.7.
7. Не обязательно. Например, в случае, изображенном на рисунке 8, с проводника, потенциал которого был 50 В, весь заряд перейдет на проводник, имевший потенциал 100 В.
8. Нет, поскольку поверхность тела эквипотенциальная. Длинная проволочка нужна, чтобы поле заряженного тела не влияло на показания электрометра.
9. Это плоскость, равноудаленная от пластин конденсатора, и поверхность шара (рис.9).
10. На высоту h.

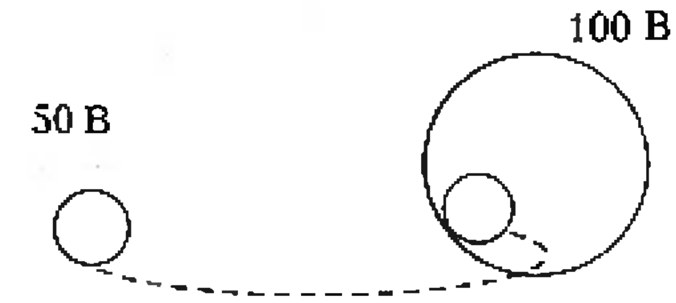


Рис. 8

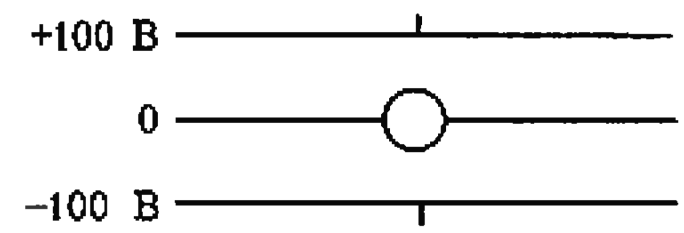


Рис. 9

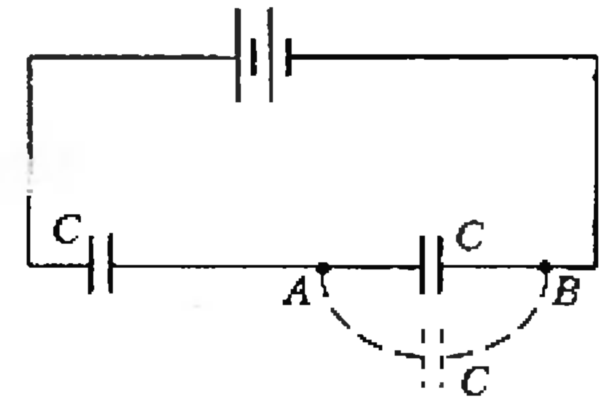


Рис. 10

11. Не повлияет (начальная и конечная точки траектории тела находятся на одной эквипотенциальной поверхности).
12. Не обязательно, так как присоединение конденсатора может изменить разность потенциалов между точками A и B (см., например, цепь, изображенную на рисунке 10).
13. Уменьшится в два раза.
14. Электрический ток от упавшего провода «растекается» во все стороны симметрично (рис.11). Разность потенциалов

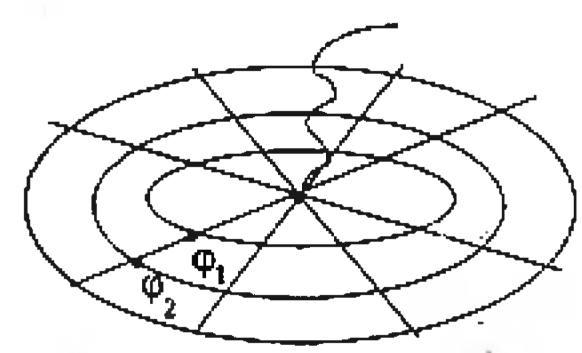


Рис. 11

между двумя точками на земле, а значит, и опасность поражения током, тем больше, чем ближе к проводу. (Такая же, кстати, картина наблюдается у дерева, в которое ударила молния.)
15. Например, если кольцо пронизывается магнитным потоком, равномерно изменяющимся со временем.
16. Нельзя (если не использовать проводники, неподвижные относительно Земли).
17. При облучении из шарика будут вылетать электроны, и шарик станет заряжаться положительно. Когда потенциальная энергия электрона в задерживающем поле шарика станет равна его кинетической энергии при вылете, наступит состояние динамического равновесия между вылетевшими электронами и шариком, после чего заряд шарика и его потенциал перестанут изменяться.

Микроопыт

Лампочку зажечь нельзя, так как соединение указанных точек проводником сразу же уравняет их потенциалы. Для вас никакой опасности нет, так как, когда вы стоите на земле, вы вместе с ней образуете эквипотенциальную поверхность и разность потенциалов между вашей макушкой и пятками практически равна нулю.

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. В области

$$R_3 \le r \le \infty \qquad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

$$R_2 \le r \le R_3 \qquad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \text{const},$$

$$R_1 \le r \le R_2 \qquad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right),$$

$$0 \le r \le R_1 \qquad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) = \text{const}.$$

2. $A = \dfrac{qQ}{\varepsilon_0 S}\left(a - \dfrac{d}{2}\right)$.

3. В области

$0 \le x \le 2$(см) $\qquad E = -10^5$ В/м,

$2 \le x \le 12 \qquad E = 0$,

$12 \le x \le 20 \qquad E = -1{,}25 \cdot 10^4$ В/м.

4. От шара к Земле перетечет заряд $Q = qR/L$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Вчера Роман купил 18 раков, сегодня — 16.

2. $\pm\dfrac{2\pi}{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} + 4k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. 3. $108\sqrt{15}/11$.

4. $\{1/3\} \cup \left[2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\right]$, наименьшее решение $x = 1/3$.

5. $\arccos 1/4$.

Вариант 2

1. Прокл выменял 34 куска мыла.

2. $\dfrac{5\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{4} + 4k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. 3. $4\sqrt{5}$. 4. $[1; 5/2] \cup \{3\} \cup (4; 5]$.

5. $72/5$.

Вариант 3

1. Урожай волшебного дерева составил 184 монеты.

2. $\arccos\left(-\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right) = \pi - \arcsin\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

3. $a_1 = 1/2,\ b_1 = -1;\ a_2 = 9/2,\ b_2 = -9$.

4. $\left(0; (3-\sqrt{2})/7\right] \cup \left[(3+\sqrt{2})/7; 5/7\right) \cup [36/49; 6/7)$. 5. $1 + 1/\sqrt{13}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\Delta V = V_0(n-1)/(n+1)$.

2. Если пружина растянулась на x, то для неподвижного груза массой M должно выполняться условие $Mg = kx + N$, где N — сила реакции пола. Критическое условие отрыва: $N = 0$, тогда $kx = Mg$. Из закона сохранения энергии $kx^2/2 = mgx$ получаем $m = M/2$.

3. Когда пластины сложены вместе, поле внутри металла равно нулю, а внешнее поле наводит на наружных поверхностях пластин заряды $-q$ и $+q$. Получается, как около заряженной пластины в конденсаторе, где по одну сторону от нее поле 0, а по другую E. Тогда $E = \sigma/\varepsilon_0 = q/(\varepsilon_0 S)$, откуда заряды на поверхностях пластин равны $\pm\varepsilon_0 ES$.

После разведения заряды на пластинах сохранятся, и однородное поле, создаваемое зарядом одной пластины, будет равно $E/2$. Таким образом, на каждую заряженную пластину будут действовать два поля: внешнее поле E и противоположное по знаку поле притяжения другой пластины $-E/2$. Поэтому искомая сила, действующая на положительно заряженную пластину, направлена по внешнему полю и равна $F_+ = qE - qE/2 = \varepsilon_0 E^2 S/2$. На отрицательно заряженную пластину действует сила, направленная против внешнего поля и равная $F_- = -F_+ = -\varepsilon_0 E^2 S/2$. Т.е. пластины расталкиваются.

4. Энергия W порохового заряда при обычном выстреле расходуется на разгон пули массой m до скорости v на вылете. В условиях задачи эта энергия идет на работу против силы внешнего давления, которое должно обратить скорость пули на выходе в нуль, т.е. $W \sim mv^2/2 \sim p_{вн}Sl$. Отсюда $p_{вн} \sim mv^2/(2Sl)$. При $m = 10^{-2}$ кг, $v \sim 10^3$ м/с, $S \sim 10^{-4}$ м², $2l \sim 2$ м получаем $p_{вн} \sim 10^8$ Па $= 10^3$ атм.

5. При опрокидывании полупустой бутылки немного воды из нее выльется, увеличив тем самым объем запертого в бутылке воздуха. Это незначительное разрежение воздуха удержит воду от вытекания: $\Delta pS \sim \rho ghS$. Оценим изменение уровня воды в бутылке Δh, приводящее к ее удержанию:

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\rho gh}{\rho gH_0} = \frac{10\ \text{см}}{10\ \text{м}} \sim \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta h}{10\ \text{см}}.$$

Отсюда $\Delta h \sim 1$ мм.

Наличие воды в тарелке не дает пройти воздуху в процессе булькания в бутылку. Если же бутылку с водой просто перевернуть, то вода из нее выльется, пробулькивая.

Вариант 2

1. $\alpha = \theta/(n-1)$.

2. После того как все токи затухнут и все падения напряжения на сопротивлениях занулятся, потенциалы точек A, *1*, *2*, станут одинаковыми. Аналогично и для точек B, *3*, *4*. Получится эквивалентная схема четырех одинаковых параллельно подсоединенных к источнику конденсаторов емкостью C каждый. Соответственно, на одной пластине эквивалентного конденсатора емкостью $4C$ будет заряд $+Q = 4UC$, а на другой — заряд $-Q = -4UC$, т.е. через источник от точки A к точке B (или наоборот) перетечет заряд $\Delta Q = 4UC$.

3. Из кинематики для ускорений комочка (рис.12) и на основании второго закона Ньютона для равнодействующей получаем $F = m\sqrt{a^2 + \left(a - v^2/R\right)^2}$. Угол наклона вектора силы к горизонтали $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{a - v^2/R}$.

(Проверим: при $a = 0$ $F = mv^2/R$; при $a = 0$ и $v = 0$ $F = 0$.)

4. Из соотношений $A \sim Fl \sim 3/2\nu R\Delta T$ и $\nu = \dfrac{p_0 V_0}{RT_0}$ находим $\Delta T \sim \dfrac{2FT_0}{3p_0 S}$. При $F \sim 100$ Н, $p_0 \sim 10^5$ Па, $S \sim 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м² получаем $\Delta T \sim 0{,}5T_0 \sim 150$ К, $T \sim 1{,}5T_0 \sim 450$ К.

5. Если жидкости в пробирке нет, только узкая часть пучка света достигнет экрана, остальные лучи уходят в стороны (рис.13), и на экране получается темный силуэт пробирки с небольшим просветом вдоль оси. Колечка практически не видно. Если же в пробирку налить ту же жидкость, что и в кювету, то при тонких стенках пробирки лучи идут к экрану, как будто ее нет. Поэтому на экране возникает лишь тень-силуэт колечка.

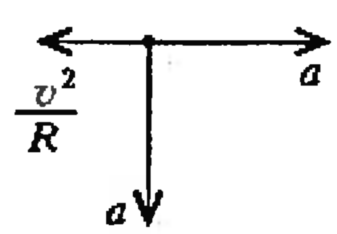


Рис. 12

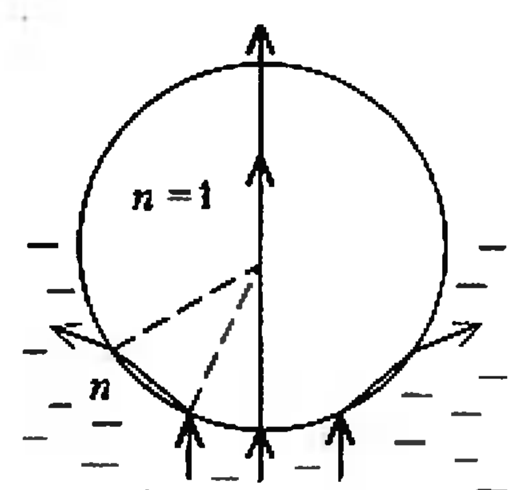


Рис. 13

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. См. рис.14.

2. $x = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{-2}$. *Указание.* Избавьтесь от иррациональности в знаменателе левой части уравнений.

3. $x = \dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{2}{3} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Перенесите $\operatorname{tg} x$ в левую часть.

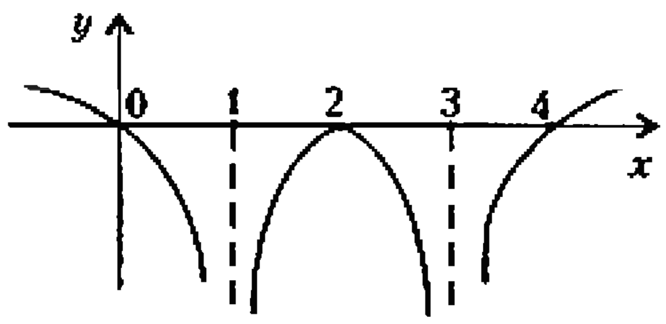


Рис. 14

5. Нет, не коснется — шар мог бы достичь дна, если бы окружность $x^2+(y-r)^2=r^2$ находилась по одну сторону от параболы $y=2x^2$ (r — радиус шара), что не имеет места.

Вариант 2

1. См. рис.15. 2. $x\in\{-2\}\cup\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]$. 3. $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{5\pi}{2}$, $x_3=8$. 4. $OC=\frac{28}{\sqrt3}$. 5. $H=2\left(\sqrt{11}-\sqrt6\right)$.

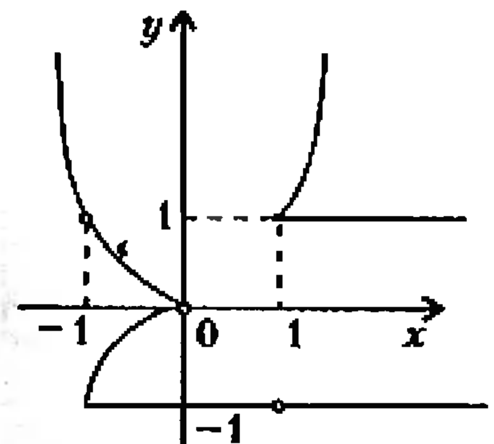


Рис.15

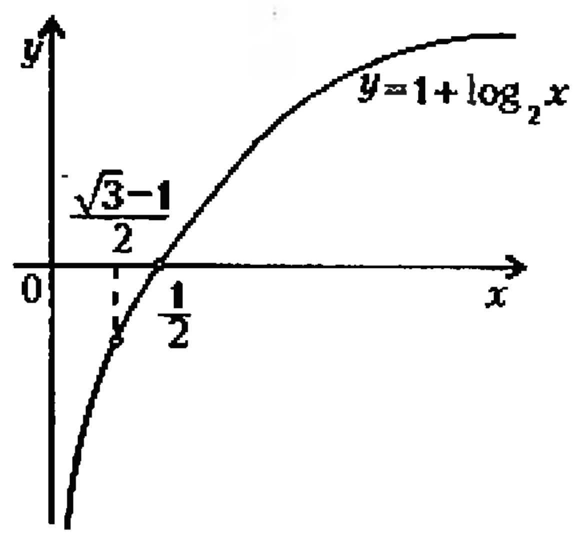


Рис. 16

Вариант 3

1. $\left\{\frac14,-\frac12,-\frac54,-2\right\}$. 2. $x_1=-2$, $x_2=\frac32$.
3. $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=\operatorname{arctg}\frac{-2\pm\sqrt7}{3}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.
4. См. рис.16. 5. $R=\frac{2a\sin\alpha}{2\cos\alpha+\sqrt2\sin\alpha+2}$.

ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И.М.ГУБКИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 4,1. 2. 5. 3. 0,9. 4. −9. 5. 19. 6. 0,2. 7. −1. 8. 45. 9. 12. 10. 1,5. 11. 0,91. 12. 9,8112.

Вариант 2

1. 12. 2. 1. 3. 2. 4. −1. 5. −6. 6. 125. 7. 0,3. 8. 15. 9. 10. 10. 18. 11. 0,12. 12. 4.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 225 м. 2. 9 кН. 3. 7 м/с. 4. 250 К. 5. 21 м. 6. 3 К. 7. 5 А. 8. 160 нм. 9. 18 м. 10. 800 кг/м^3. 11. 10 В. 12. 3 с.

Вариант 2

1. 5 м/с^2. 2. 4 м/с. 3. 12 Дж. 4. 637. 5. 4. 6. 4 А. 7. 2. 8. 40 см. 9. 20 м/с. 10. 6 см. 11. 128 мН. 12. 25 мс.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-3;\,2)$, $(-2;\,3)$. 2. $\frac{(-1)^n\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. 3. 40 деталей в час. 4. $2<x\le\frac83$.

5. $k>\frac54$. *Указание.* Выразите k через x и исследуйте полученную функцию на экстремум.
6. 12 : 7. *Указание.* Докажите, что $AE=ED$.

Вариант 2

1. $(-5;\,6)$, $(3;\,8)$. 2. $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. 3. 21%.
4. $(1;3)\cup[5;8]$. 5. $(-\infty;0]\cup\{27\}$.
6. *Указание.* Пусть M — точка на стороне AB такая, что $MC\parallel KE$. Тогда

$$\frac{BC}{CM}=\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC},\ \frac{AM}{MC}=\frac{AC}{CE}.$$

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\Delta U=3$ кДж. 2. $H=298$ м, $t=17,5$ с. 3. $A=0,24$ Дж.
4. $m=4\cdot10^6$ кг. 5. $p_э-p_ф=1,65\cdot10^{-25}$ кг·м/с $\le p_ш\le p_э+p_ф=1,7\cdot10^{-25}$ кг·м/с. 6. $x=8,3$ см.

Вариант 2

1. $k=250$ Н/м. 2. $x=3,4$ м. 3. $Q=0,12$ Дж.
4. $Q=13,5$ кДж. 5. $W=5\cdot10^{-5}$ Дж. 6. $v=720$ м/с.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-\sqrt{3/2}$. 2. $2\frac17$. 3. 1. 4. 4. 5. 16; 24; 40; 48. 6. $5\sqrt{119}/13$.
7. (9; 1). 8. $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. 9. 0; 3/2. 10. $(-3;-2)\cup[0;1)$.

11. *Указание.* Если $\alpha_1\ge0$, $\alpha_2\ge0$, $\alpha_3\ge0$, $\alpha_1++\alpha_2+\alpha_3=1$, то

$$S\le\alpha_1\cdot\frac{ab}{2}+\alpha_2\frac{bc}{2}+\alpha_3\cdot\frac{ca}{2}\le$$
$$\le\frac{\alpha_1\left(a^2+b^2\right)+\alpha_2\left(b^2+c^2\right)+\alpha_3\left(c^2+a^2\right)}{4}.$$

12. 1750 т.

Вариант 2

1. −2/3. 2. $(-\infty;3)$. 3. $\pm\frac{\pi}{12}+\frac12+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. 4. 3.
5. 16 км/ч, 4 км/ч. 6. 3; 3^{-2}. 7. −5. 8. 2. 9. $[-6/5;6)$.
10. $-\sin1$. 11. 400/49. 12. $\pi/2+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $L=2v_0\tau\sqrt{1-(g\tau/v_0)^2}\approx34,6$ м.
2. $F_1=Mv/\tau\approx0,8$ Н, $F_2=M(a+\mu g)/\sqrt{1+\mu^2}\approx12$ Н, $\alpha=\operatorname{arctg}\mu\approx11^\circ$. 3. $Q=\nu R\left(3T_1+2T_2-5T_3\right)/2\approx22,8$ кДж.
4. $\delta=\varepsilon\left(1-E/E_{пр}\right)/(\varepsilon-1)=2/3$. 5. $r=R^2/R_л=4$ Ом.
6. $h=e\left(U_2-U_1\right)/\left(c/\lambda_2-\nu_1\right)\approx7\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Вариант 2

1. $t=4\sqrt{2s/g}\approx1,26$ с.
2. $s_1=v_0^2/(2\mu g)=3$ м, $s_2=s_1+L/2=3,6$ м.
3. $p=\nu R\Delta T/\Delta V=8310$ Па, $V=\nu R\Delta T/\Delta p=0,831$ м^3, $T=\nu R(\Delta T)^2/(\Delta p\Delta V)=831$ К.
4. Через $t=\sqrt{d(d-h)/(gh)}\approx3,5\cdot10^{-2}$ с, с верхней пластиной.
5. $\mathcal{E}=3U=24$ В.
6. $F=d/(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha-1)\approx d=0,12$ м.

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 3 при $x>0$, $x\neq 4$. 2. При $a\in\left\{\frac{1}{16};\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right\}$. 3. $-\frac{7}{6}$.
4. $\left\{-\frac{9\pi}{4};-\frac{5\pi}{4}\right\}$. 5. $\pi b(a+b)$.

Вариант 2

1. а) $f(x)=x$ при $x\neq 1$; б) если $a\in(-\infty,2)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$, то $x_1=-\frac{1}{a+1}$, $x_2=\frac{3}{1-a}$; если $a\in(-1,0)\cup(0,1)\cup\{4\}$, то $x=-\frac{1}{a+1}$; если $a\in(-2,-1]\cup\{0\}$, то уравнение решений не имеет.
2. $\{25\}$. 3. 813. 4. $\left\{-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right\}$. 5. $\frac{540}{28+\sqrt{109}}$.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.А.И.ГЕРЦЕНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$, если $n=1,2$;
$\left(-\infty;-n-\sqrt{n^2-4}\right]\cup\left[-n+\sqrt{n^2-4};2\right)\cup(2;+\infty)$, если $n\geq 3$,
б) $f_2(x)=|x+2|$, $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ (рис.17),
в) $\left(-3-\sqrt{5};0\right)$ и $\left(-3+\sqrt{5};0\right)$.
2. $x\in(-1/2;0)\cup(0;1/2)$. 3. $x_1=-2/3$, $x_2=2/3$, $x_3=4/3$.
4. 120. 5. $V=d/24\cdot\sqrt{256q^2-c^2d^2}$.

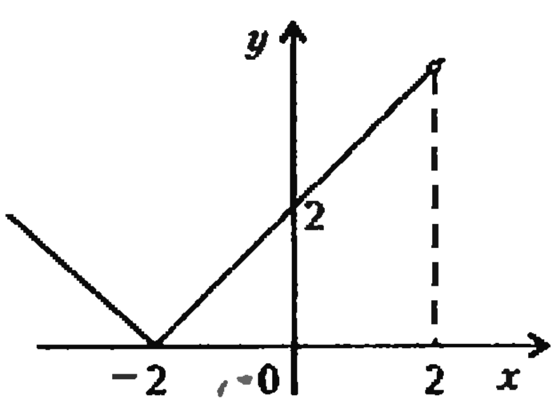


Рис. 17

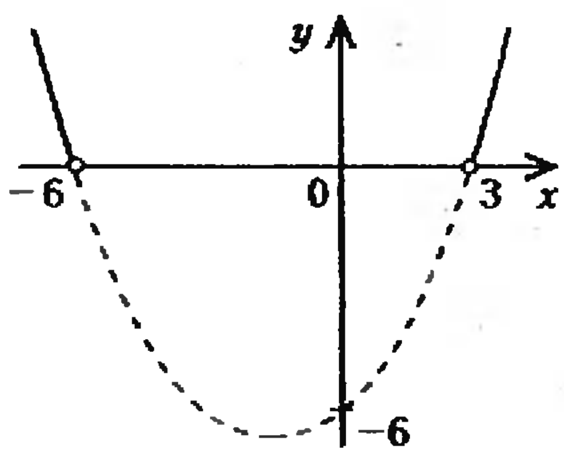


Рис. 18

Вариант 2

1. а) $(-\infty;-2n]\cup[n;+\infty)$;
б) $g(x)=1/3\left(x^2+3x-18\right)$, $x\in(-\infty;-6)\cup(3;+\infty)$ (рис.18);
в) графики функций не пересекаются.
2. $x\in\left(-1;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$. 3. $x_1=-\frac{2\pi}{3}$, $x_2=-\frac{\pi}{3}$, $x_3=\frac{\pi}{3}$.
4. 72. 5. $V=\frac{a^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 2. $\left(1\pm\sqrt{2};1\mp\sqrt{2}\right)$; $\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2};1\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $[-5;-3)\cup(-1;1]$. 4. $\frac{40R}{9}$.
5. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\{1\}$. *Указание.* Возведя в квадрат обе части уравнения, получите уравнение, имеющее корни $x_1=2$ и $x_2=6-4a$. Эти значения подставьте в первоначальное уравнение.

Вариант 2

1. 6. 2. $(1;+\infty)$. 3. $(-\infty;1)\cup\left\{\frac{5}{4}\right\}$. 4. $\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}-1$.
5. $\pm\arccos\frac{5}{6}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой синусов и формулами, выражающими площадь треугольника через длины его сторон и радиусы вписанной и описанной окружностей.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pi+2\pi k$, $k\in Z$. 2. $\left[\log_2\frac{2\sqrt{2}+1}{2};1\right)$.
3. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. *Указание.* Покажите, что сумма кубов корней уравнения равна $\sin 3\alpha=-1$. Оставьте лишь те α, для которых дискриминант данного уравнения положителен.
4. $r=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$; $2+\sqrt{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой Пифагора для получения соотношения между радиусами окружностей. Исследуйте полученную функцию на минимум с помощью производной.
5. $\left(-\infty;\frac{a+5}{a+4}\right)$, если $a<-4$; $\left(\frac{2a+1}{a-3};+\infty\right)$, если $a>3$; нет решений, если $-4\leq a\leq 3$. *Указание.* Рассмотрите 3 промежутка значений a, данных в ответе.

Вариант 4

1. $(1;0)$, $(-1;-1)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$.
2. $\left(-3-\sqrt{10};-6\right)\cup\left(0;\sqrt{10}-3\right)\cup\left\{-3\pm\sqrt{13}\right\}$.
3. $5+2\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть $n=x+\frac{1}{x}$. Задача эквивалентна отысканию наибольшего числа n, для которого $\frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n^2-4}\right)\leq 10$.
4. $\left(-\infty;2-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2}-2;+\infty\right)$. *Указание.* Искомое множество является множеством значений функции $t-\frac{6-2\sqrt{2}}{t}$, $0<|t|\leq\sqrt{2}$, где $t=\cos x-\sin x$.
5. $AD=DB$. *Указание.* Пусть E — точка пересечения l со стороной AC. Воспользуйтесь подобием треугольников ΔBDH, ΔHEC, ΔBHC.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ПРИ «КУРЧАТОВСКОМ ИНСТИТУТЕ»

МАТЕМАТИКА

1. $x=-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.
2. $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(1;5)$. 3. $x=2/5$, $y=3$, $z=0$.
4. $\frac{d\pm\sqrt{d^2-c^2}}{2}$. 5. $S=-\frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$, $\pi/2<\varphi<\pi$.
6. $x_0=-3/7$, $S_{\min}=\frac{216}{49}\sqrt[4]{\frac{7}{9}}$.
7. $\left[a^4\right]$ при нецелом a; a^4 и a^4-1 при целом a.

ФИЗИКА

1. а) $\mu_{\min}=\frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\cos^2\alpha}$;
б) $v=\sqrt{2gh\frac{m/M}{1+M\left(1+(1+m/M)^2\operatorname{tg}^2\alpha\right)/m}}$.
2. а) $T=\frac{2T_1T_2}{T_1+T_2}$; б) $Q=\frac{5p_0V}{4}\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}$.
3. а) $-\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$; б) $-\mathcal{E}R/(R+2r)$, $\mathcal{E}$.
4. а) $\arccos\left(\cos\theta\cdot(1+bz/n_0)\right)$; б) $R=n_0/(b\cos\theta)$.

VI МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. Полученное число больше. *Указание.* Поскольку $\frac{1}{14}$ = $= 0{,}0(714285)$, а длина периода дроби равна 6, на 1996 месте после запятой стоит цифра 4, а после ее вычеркивания на ее месте оказывается цифра 2.

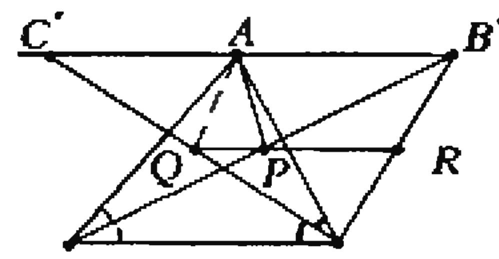


Рис. 19

2. $\frac{b+c-a}{2}$. *Решение.* Проведем через вершину A прямую l, параллельную BC, и продолжим биссектрисы до пересечения с прямой l в точках B' и C' (рис.19). Треугольники BAB' и CAC' — равнобедренные, а точки P и Q — середины отрезков BB' и CC'. Поэтому прямая PQ параллельна BC, отрезок QR — средняя линия в треугольнике $C'CB'$, PR — средняя линия в треугольнике $BB'C$. Отсюда

$$QR = \frac{b+c}{2};\ PR = \frac{a}{2};\ PQ = = \frac{b+c-a}{2}.$$

3. 60 и 95. *Указание.* Пусть a и b — искомые двузначные числа, а разность между суммой всех двузначных чисел и $a + b$ в 50 раз больше, чем a, т.е. $4905 - (a + b) = 50a$. Возможны три случая ($a + b < 200$): $a + b = 55$; $a + b = 105$; $a + b = 155$. В первых двух случаях одно из чисел a или b не будет двузначным.

4. а) Может; б) n — нечетно. *Решение.* Из условия следует, что одна из девочек знакома со всеми мальчиками, одна — с $(n-1)$ мальчиком, ..., одна — с одним мальчиком и одна не знакома ни с одним из мальчиков. Общее число знакомств девочек равно $0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Если каждый из мальчиков знаком с k девочками, то общее количество знакомств мальчиков равно kn. Так как количество знакомств мальчиков равно количеству знакомств девочек, то $\frac{n(n+1)}{2} =$ $= kn$, откуда $k = \frac{n+1}{2}$. Так как k — целое число, то n — нечетно. Докажем, что при любом нечетном n нужная система знакомств существует. Пусть в компании $n = 2k - 1$ мальчиков, $2k$ девочек и ни один мальчик не знаком ни с одной девочкой. Разобьем всех девочек (их — четное число) на пары и занумеруем эти пары числами от 1 до k. Первую девочку из первой пары знакомим со всеми мальчиками, а вторую не знакомим ни с одним из мальчиков. Первую девочку из второй пары знакомим с $2k - 2$ мальчиками, вторую — с одним оставшимся мальчиком. Вообще, первую девочку из пары с номером l знакомим с $n - l + 1$ мальчиками, а другую — с $l - 1$ оставшимися мальчиками. В результате все девочки окажутся знакомыми с разным количеством мальчиков, а каждый из мальчиков знаком с k девочками.

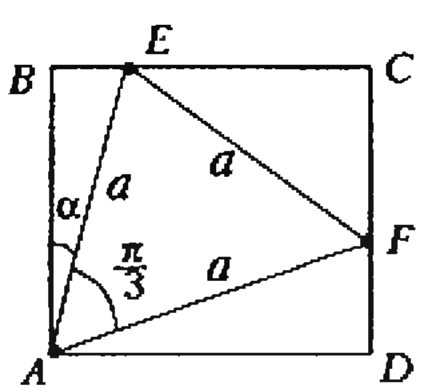


Рис. 20

5. $S_1 + S_2$. *Решение.* Пусть $\angle BAE = \alpha$, $AE = EF = FA = a$ (рис.20). Тогда $\angle FAD = \frac{\pi}{6} - \alpha$, $\angle CFE = \frac{\pi}{3} - \alpha$. Выразим площади S_1, S_2 и искомую площадь S через α и a:

$$S_1 = S_{ABE} = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}a^2\sin 2\alpha,$$

$$S_2 = S_{AFD} = \frac{1}{4}a^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right),$$

$$S = S_{ECF} = \frac{1}{4}a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right).$$

Осталось заметить, что

$$\sin 2\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right).$$

6. -1 или 1. *Указание.* Перемножив равенства

$$x - y = \frac{y-z}{yz},\quad y - z = \frac{z-x}{xz},\quad x - z = \frac{y-x}{xy},$$

получим

$$(x-y)(y-z)(x-z) = \frac{(y-z)(z-x)(y-z)}{x^2y^2z^2}.$$

Так как $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$, то $x^2y^2z^2 = 1$.
Итак, либо $xyz = 1$, либо $xyz = -1$.

7. $3 \le n \le 12$. Поскольку всякий угол многоугольника, удовлетворяющего условию задачи, равен либо 30°, либо 90°, либо 120°, а сумма всех внешних углов равна 360°, число n вершин многоугольника не больше чем $\frac{360°}{30°} = 12$.

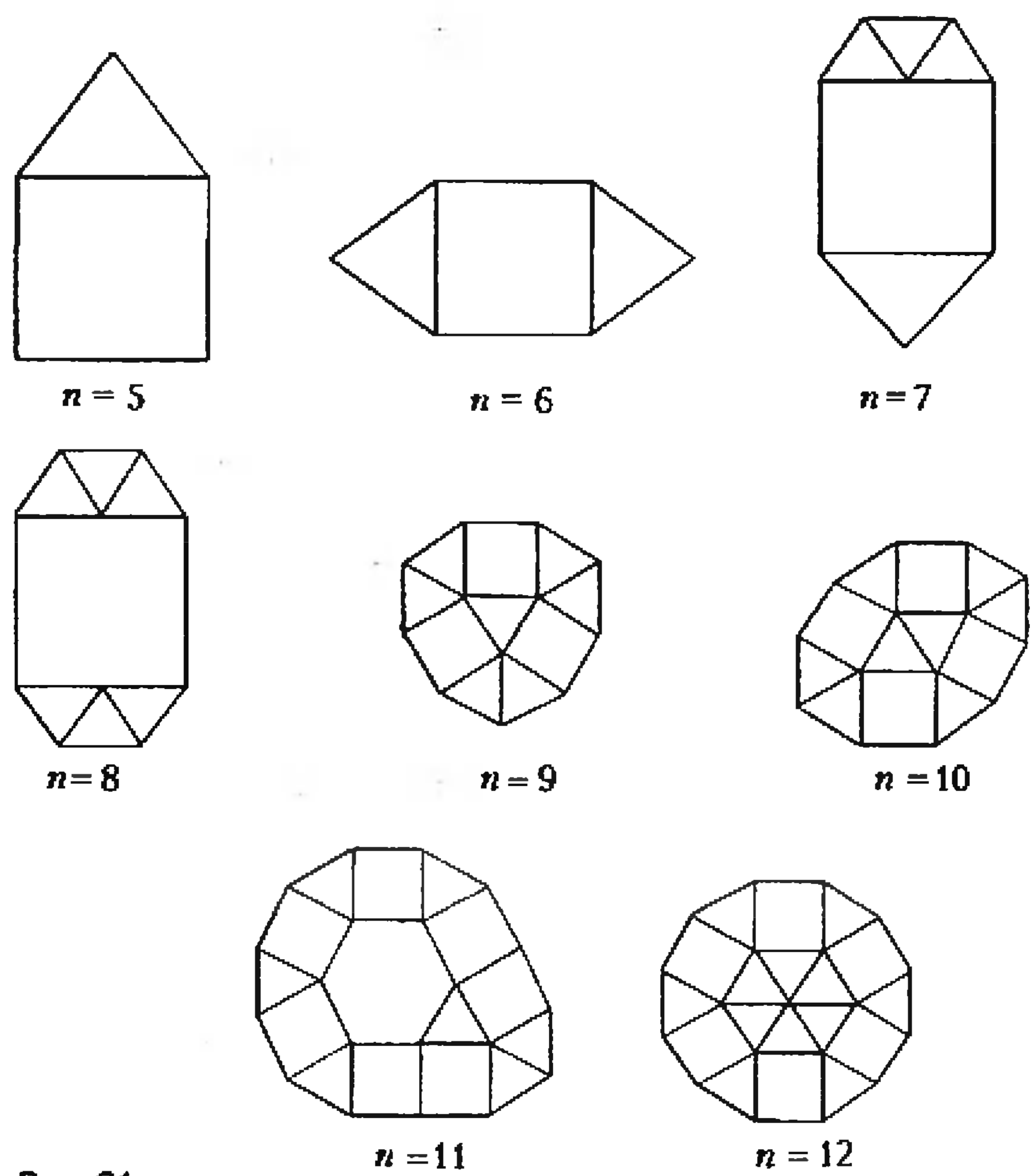


Рис. 21

На рисунке 21 показаны примеры многоугольников с числом сторон от 5 до 12, удовлетворяющих условию.

ФИЗИКА

1. а) $\alpha = \arccos(v_л/v_р)$; б) $\alpha = \arccos(2v_л/v_р)$.

2. $L = Mv_0^2/(2\mu(m+M)g)$. *Указание.* Чтобы получить дополнительное давление, оказываемое шариком на плиту, необходимо усреднить давление при столкновениях за все время движения плиты.

3. $t=\frac{1}{v}\sqrt[3]{\frac{3M}{4\rho_н}}$, где $\rho_н$ — плотность насыщенных аров, v — скорость разлета газового шара; $\rho=\rho_0(t_0/t)^3$, где ρ_0 — начальная плотность газового шара, $t_0=R/v$.

4. $h=\sqrt{v^2/(2g)}$ при $v\le\sqrt{2gL}$; $h=2L$ при $v\le\sqrt{5gL}$;
$h=L\left(1+\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\right)$, где $\sin\alpha=\frac{2}{3}\left(\frac{v^2}{2gL}-1\right)$, при подъеме на угол $\alpha>90°$. *Указание.* При условии $v=\sqrt{gL\sin\alpha}$ натяжение нити равно нулю, тело отрывается от круговой орбиты и летит по параболе.

5. $T_3=\left(\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}\right)^2/4$. **6.** $Q_2=\sqrt{Q_1Q_3}$. **7.** $\Delta t=2{,}1$ мин.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. 1996^2-5.
2. 11 очков. *Указание.* Если команда наберет 11 очков, она заведомо займет одно из первых четырех мест. Десять набранных очков еще не обеспечивают выход в финал, как показывает пример турнира, в котором первые 5 команд играют все игры между собой вничью, выигрывают у последних трех команд и в итоге набирают по 10 очков.
3. а) 9876524130;
б) 1024375869. *Указание.* Пусть m — сумма цифр, стоящих на первом, третьем, пятом, девятом местах десятичной записи числа, а n — сумма остальных цифр. По признаку делимости на 11 число $m-n$ делится на 11, т.е. $m-n=11k$, где k — целое число. Кроме того, $m+n=45$. Без труда доказывается, что в случае а) $m=28$, $n=17$, а в случае б) $m=17$, $n=28$.
4. $2m$. *Указание.* На продолжении AM за точку M возьмем точку D так, что $MD=AM$. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм с диагональю AD, равной $A'A''$.
5. По крайней мере один из участников слукавил. *Указание.* Просуммируем отдельно числа, названные девочками, и числа, названные мальчиками. Очевидно, полученные числа должны быть равны. Однако это невозможно, так как одно из них делится на 3, а другое — нет.

ФИЗИКА

1. Когда уровень воды совпадает с уровнем центра тяжести стакана.
2. Нет, поскольку давление насыщенных паров надо льдом ниже, чем над жидкостью, и капли начнут испарятся, а ледовые кристаллы — расти.
3. Нужно обернуть бутылку в мокрое полотенце и положить за окно. Быстрый поток воздуха будет обеспечивать быстрое испарение воды и, как следствие, охлаждение бутылки.
4. Время подъема меньше времени спуска.
5. Используя уравнение Бернулли, получим $h=F/(\rho Sg)-H_1$, где ρ — плотность воды.

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. Сейчас эта задача формулируется так: при каких n число $2^{2^n}+1$ простое?
2. Тригонометрия.
3. См. рис.22.

ФИЗИКА

1. Шкала Фаренгейта, температура кипения воды равна 212 °F.
2. И.Ньютон, наблюдаемое им явление – «кольца Ньютона».
3. Электроемкость, электродвижущая сила.
4. Гибель озона в стратосфере (существование «озоновой дыры» над Антарктидой).
5. «Живые силы» — кинетическая энергия тела, «мертвые силы» — его потенциальная энергия.

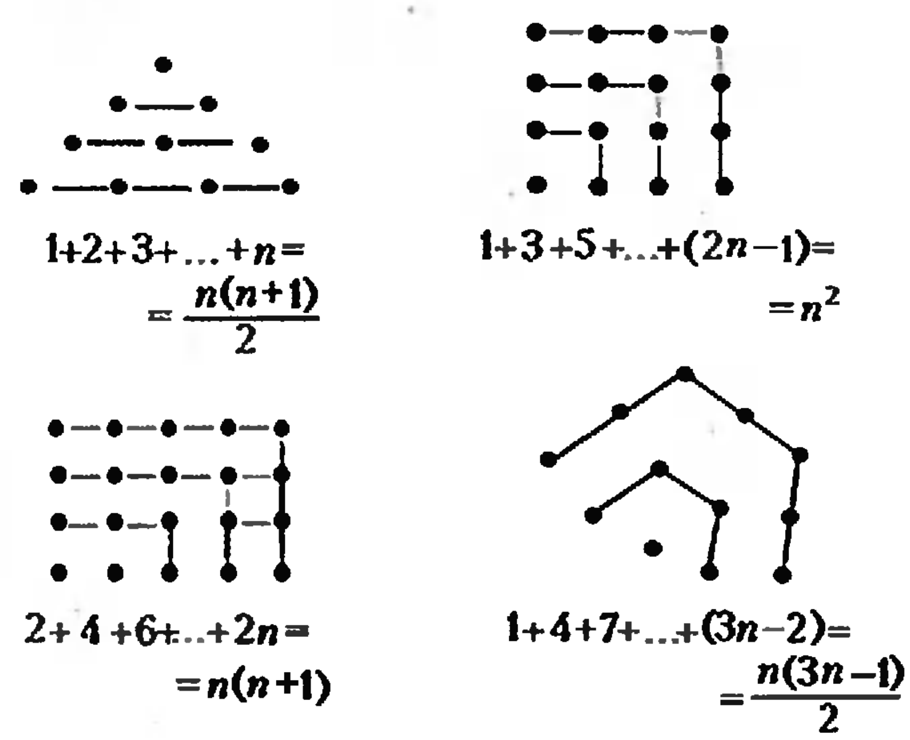


Рис. 22

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
А.Н.Балдин, Г.М.Гончаров, Д.Н.Гришукова, М.М.Константинова, И.А.Тарабанова, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

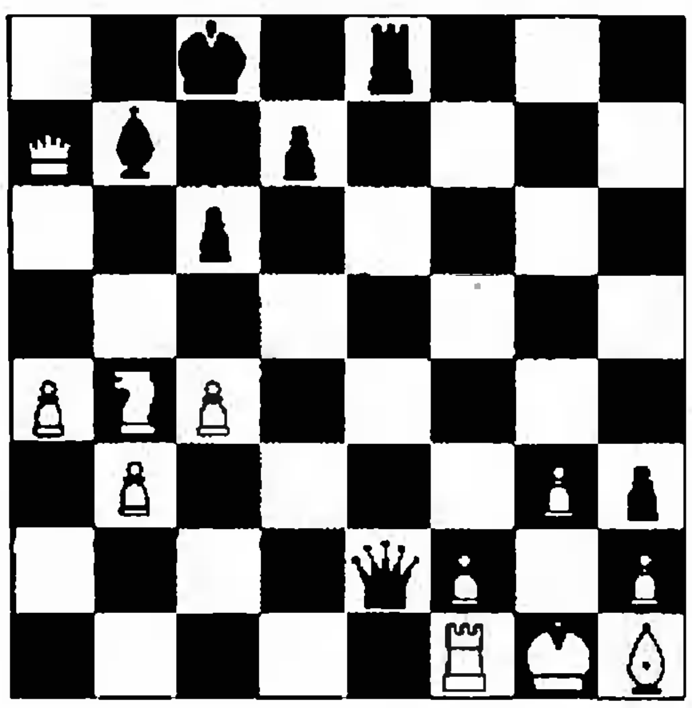
Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 504

ЧЕТЫРЕ СЮРПРИЗА ЭЛЕКТРОННОГО РОБОТА

В прошлом номере мы рассмотрели несколько образцов творчества шахматных компьютеров. Завершим эту тему четырьмя любопытными примерами.

Особенно тщательно компьютеры изучали партии матча Каспаров — Карпов (Нью-Йорк, Лион, 1990) и обнаружили довольно много интересного.



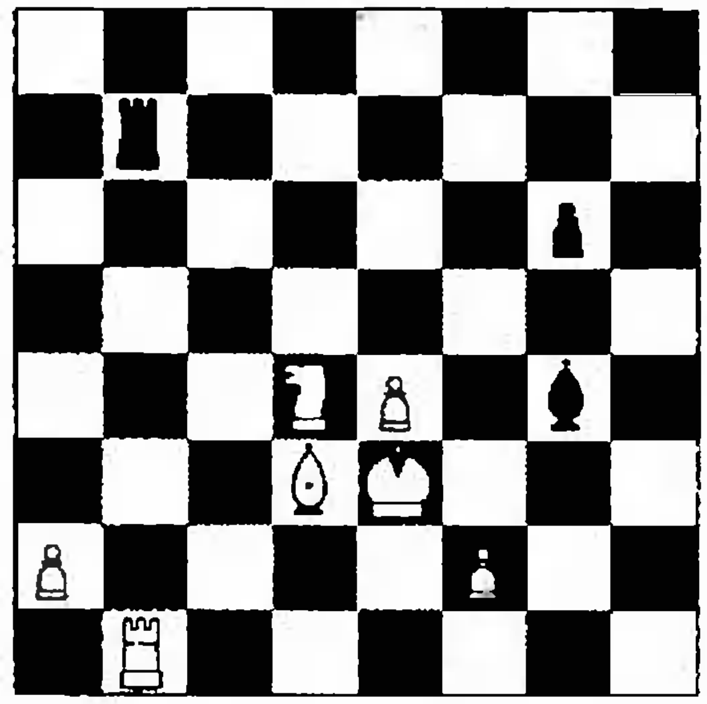
Г.Каспаров — А.Карпов

Эта позиция возникла в 14-й партии матча. Хотя у черных лишнее качество, положение их вызывает тревогу — грозит марш пешки «а», а также маневр Kb4-a6. Для защиты от этих угроз в пресс-центре предлагалось 25...Kpd8, чтобы на 26. Ф:b7 воспользоваться удалением ферзя с важной диагонали a7-g1 и объявить вечный шах — 26...Л:f2! 27. Л:f2 Фе1+ 28. Лf1 Фе3+ 29. Лf2 Фе1+. Однако у белых есть красивое опровержение этой комбинации — на 26...Л:f2 следует промежуточное 27. Фb8+! Кре7, и теперь блестящий удар 28. К:с6+!! Вертикаль «f» недоступна королю черных из-за Л:f2+, и поэтому они гибнут: 28...dc 29. Ф:с7+ Кре6 30. Ф:с6+ Кре7 31. Фс7+ Кре6 32. Фb6+ и 33. Ф:f2.

Получается, что вечного шаха нет? Окончательный диагноз поставил микрочемпион «Мефисто», который в позиции на диаграмме предложил совершенно неожиданный маневр **25...Лf3!!** Оказывается, промежуточный ход имеется в распоряжении не только белых, но и черных. Теперь на **26. Ка6** (26. а5 Л:b3, а после 26. С:f3 Ф:f3 черные ставят мат) уже можно отступить королем — **26...Kpd8!**, и вечный шах неизбежен: 27. Ф:b7 (27. Кс5 Сс8!) 27... Л:f2! Белый конь удалился от поля с6, и знакомая операция стала возможна: 28. Л:f2 Фе1+ и т.д.

После случившегося в партии 25...d5 дело тоже закончилось миром, но Карпову пришлось пережить немало неприятных минут, которых он мог избежать, сыграв 25...Лf3.

Похожая история произошла и в следующей, 15-й партии.



А.Карпов — Г.Каспаров

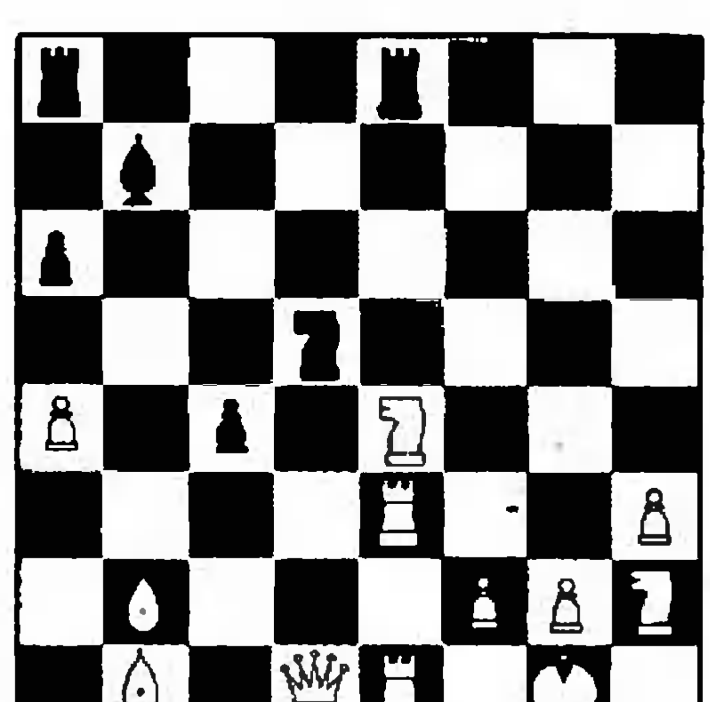
Испытывая недостаток времени, Карпов напал пешкой на слона — 26. f3? и, после 26...Лbd7, противники вскоре согласились на ничью. Между тем, как обнаружил все тот же «Мефисто», нападая на слона ладьей — **26. Лh4!** и попутно подключая ее к атаке, белые форсированно брали верх. Вот основной вариант, указанный электронным гроссмейстером.

26...Лbd7. Не годится 26...Сс8 из-за 27. f4 и нет ответа 27...Лbd7 ввиду обнаженности пункта е6 — 28. е5+ и т.д. Плохо и 26...Kf5+ 27. ef Ле7+ 28. Се4 gf 29. f3 Kpg5 30. Лh2 с решающим преимуществом.

27. е5+ Kpg5. На 27...Кр:е5 следует 28. Лb5+ Kd5+ 29. Л:d5+ Кр:d5 (29...Л:d5 30. Кс6+) 30. Л:g4.

28. Л:g4+! Кр:g4 29. Лg1+ Kph5. В матовом кольце оказывался черный король и при другом отступлении — 29...Kph3 30. Лh1+ Kpg4 (30...Kpg2 31. Се4×) 31. Се2+ Kpg5 32. f4×.

30. Лh1+ Kpg5 31. f4+ Kpg4 32. Се2+ Kpg3 33. Лg1+ Kph4 (33...Kph3 34. Cg4+ и 35. Kf3×). **34. Kpf3**, и мат следующим ходом.

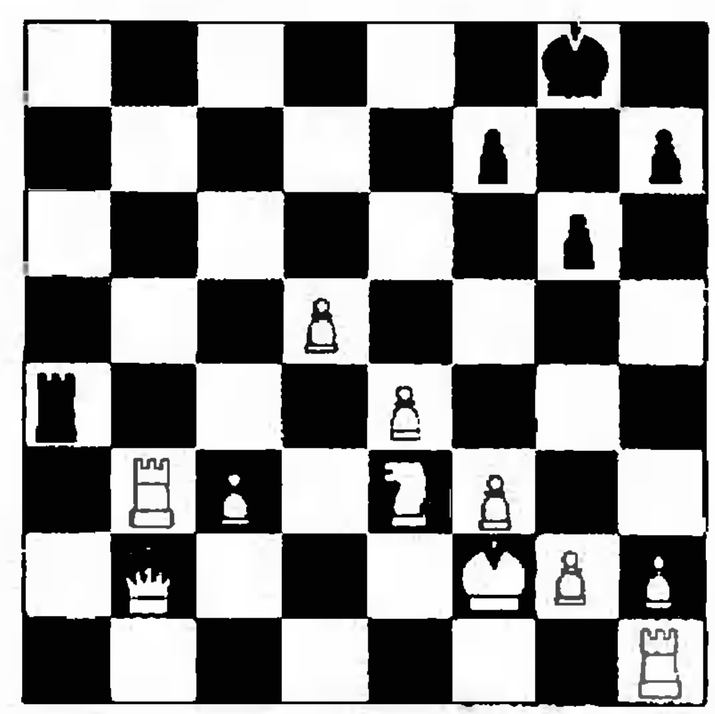


Г.Каспаров — А.Карпов

Позиция из 20-й партии. После 24. Лg3 Ле6 25. Kg4 Фе8 26. К:h6 с3? черные в конце концов проиграли партию. Однако продолжая 26...Л:h6! они могли упорно защищаться, например: 27. K:d6 Ф:е1+ 28. Ф:е1 Л:d6 29. Фе4 Kd3!

Эффектный вариант в позиции на диаграмме предложил электронный экс-чемпион мира «Дип сот»: **24. Фh5! К:е3** (упорнее 24...с3) **25. Ф:h6+ Kpg8 26. Kg5!** с неизбежным матом.

Уникальная книга вышла несколько лет назад в Голландии. В ней собраны все партии крупнейшего международного турнира в Амстердаме в 1991 году (с участием Каспарова, Карпова, Тиммана, Шорта и других знаменитостей), прокомментированные компьютерными, главным образом «Мефисто». Разумеется, электронные комментаторы обнаружили много такого, что скрылось от глаз участников турнира.



Й.Хьяртарсон — Г.Каспаров

Здесь черные сыграли 27...Ch6? и после 28. Ле1 Лс8 29. Лb8 Л:b8 30. Ф:b8+ Kpg7 31. Фb2 Фа7 32. Фс1 Ла3 33. Kpg3 Фс5 34. Фb2! С:е3 35. Л:е3 Ф:е3 36. Ф:а3 белые вышли из щекотливого положения.

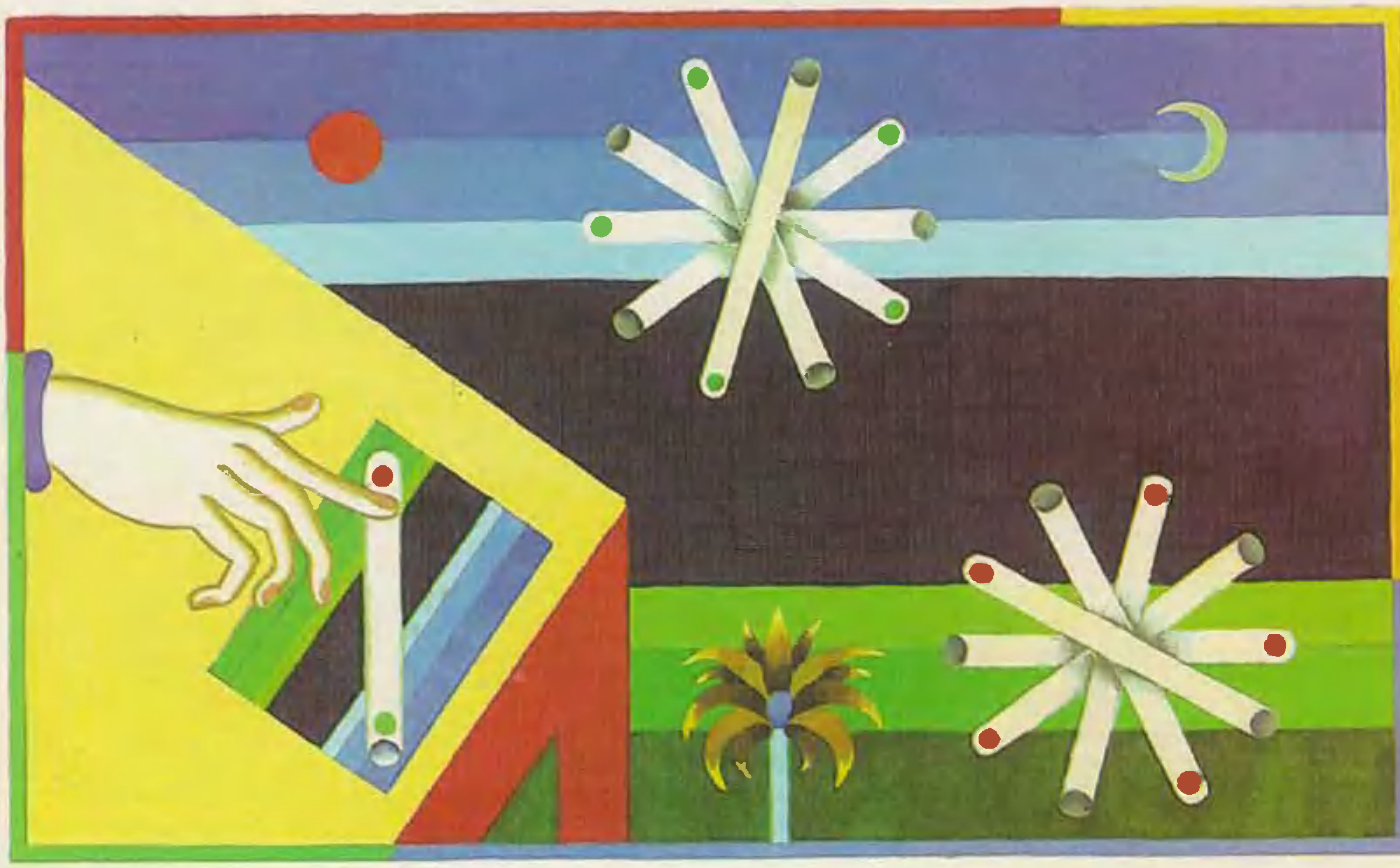
Между тем, как показали компьютеры «Таск» и «Чесс машин», у черных было более решительное продолжение:

27...f5! Теперь белые ввиду угрозы f5-f4 не успевают подтянуть ладью. **28. ef gf 29. Лb5 Фа7! 30. Лb7 Ла2! 31. Л:а7 Л:b2+ 32. Kpg1 Лb1+ 33. Kf1 С:с3 34. Ла4 Лfb8 35. Kpf2 Лfb5**, и у белых мало шансов на спасение в эндшпиле.

Е.Гик

Индекс 70465

МЕХАНИЧЕСКИЙ «СТРОБОСКОП»



Новая игрушка для любознательных физиков выглядит весьма просто. Это легкая пластмассовая трубочка длиной приблизительно 80 мм и диаметром 16 мм с толщиной стенок около 1 мм (так что трубочка жесткая). Трубочка светло-бежевого цвета, на одном ее конце яркой краской нанесено красное пятнышко размером примерно 3 мм, на другом — такое же зеленое пятнышко.

Признаемся честно, эту игрушку мы получили в подарок — один из наших авторов приобрел ее в специализированном американском магазине «физических штучек». Но думаем, что читателям будет нетрудно изготовить такую игрушку самостоятельно или даже отыскать готовый аналог среди окружающих предметов.

Внешне трубочка ничего особенного из себя не представляет. Чудеса начинаются, когда мы кладем трубочку на гладкий стол и приводим в движение, надавив пальцем на один из ее концов. Выскакивая из-под пальца, трубочка начинает быстро вращаться. Присмотревшись, мы видим на равных расстояниях друг от друга 5 почти неподвижных точек, причем, что самое удивительное, все эти точки... одного цвета! Каждый раз видимым оказывается то пятно, которое находилось возле нашего пальца, когда мы приводили трубочку в движение. Если надавить на «красный» конец, то увидим пять красных точек, если на «зеленый» — то пять зеленых. Пятно другого цвета при этом как бы исчезает!

Попробуйте понять, что происходит. Почему мы видим именно пять точек? Почему эти точки кажутся неподвижными? Куда подевалось пятнышко другого цвета и почему мы его не видим? В чем здесь (конечно, весьма условная) аналогия со стробоскопом?

(Обсуждение увиденного см. на с.44.)